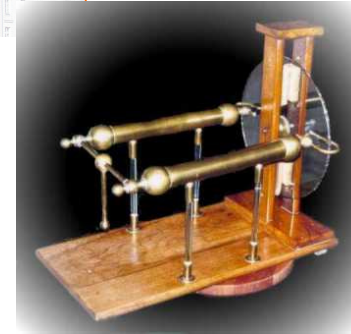
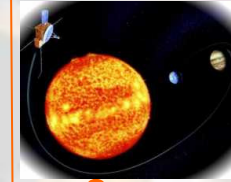
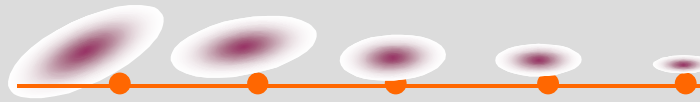




(O.Granier)

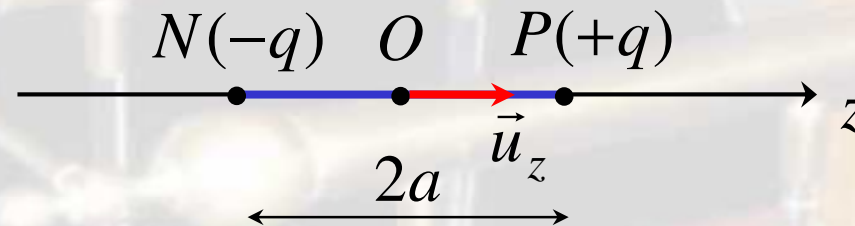


# Étude du dipôle électrostatique



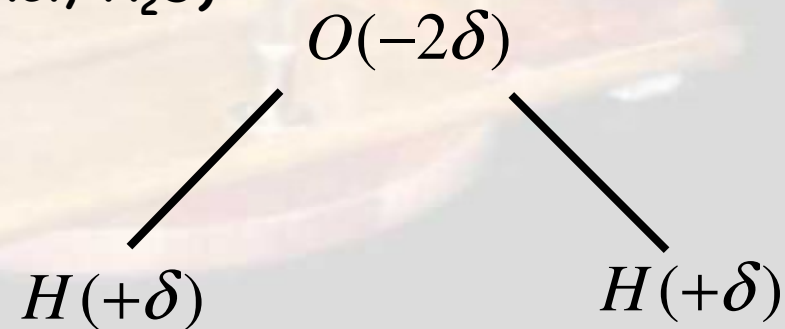
## I - Définition et approximation dipolaire

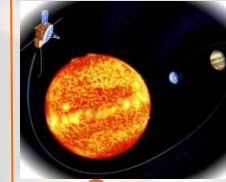
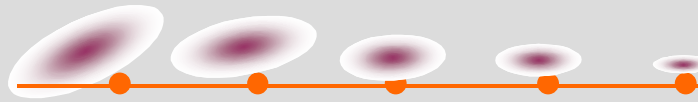
On appelle « **dipôle électrostatique** » un ensemble rigide de deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$  (donc globalement neutre), distantes de  $2a$ .



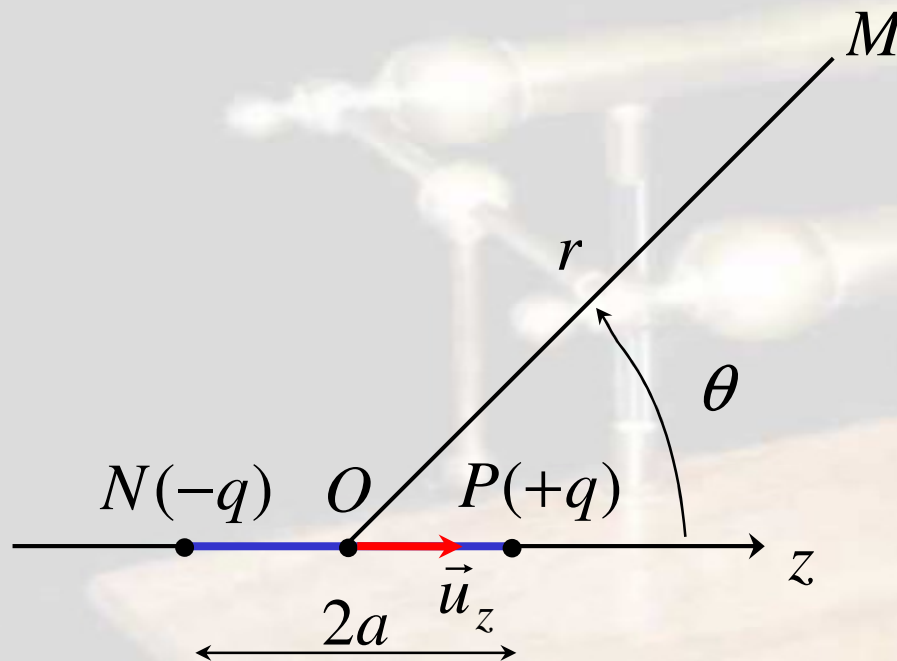
Un tel modèle permet d'étudier :

\* Les **molécules polaires** (par exemple :  $\text{HCl}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ )





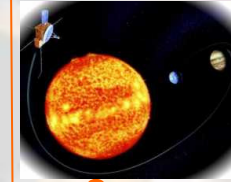
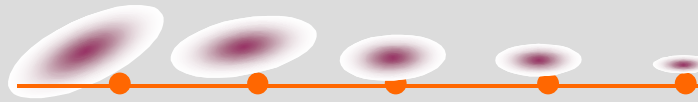
\* La **polarisation des atomes** dans un champ électrique extérieur (phénomène de solvatation des ions)



On calcule le **potentiel** puis le **champ électrique** ( $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ ) créé par le dipôle en un point  $M$  de l'espace.

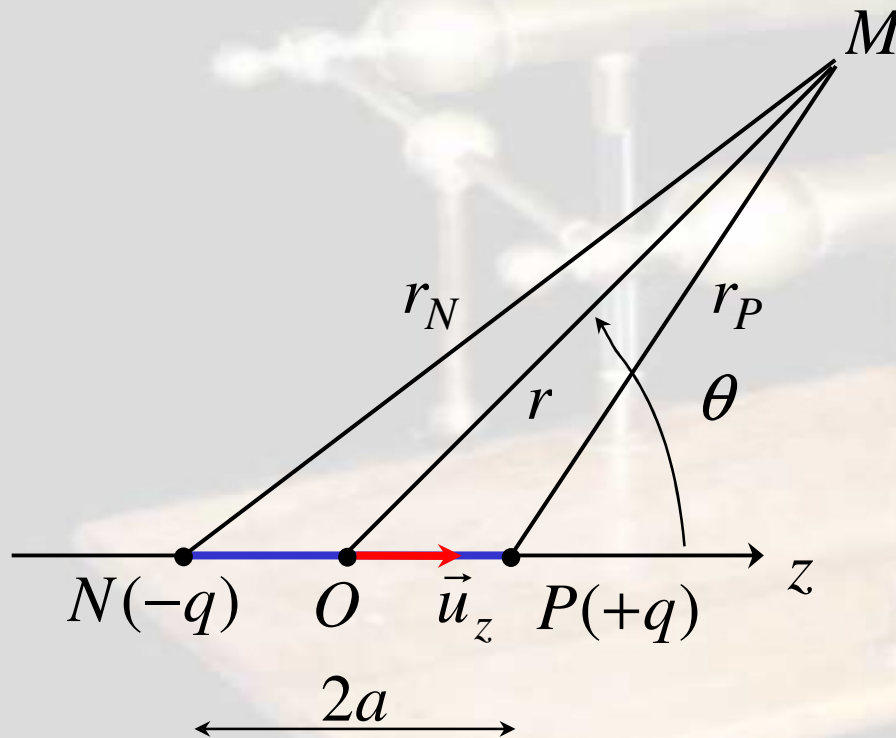
**Symétrie de révolution** autour de l'axe (Oz) : on choisit  $M(r, \theta)$  dans le plan des deux charges.

**Approximation dipolaire** :  $r \gg a$  (on se place « loin » des charges, c'est-à-dire à des distances bien supérieures à quelques nm).



## II - Calcul du potentiel dans le cadre de l'approximation dipolaire

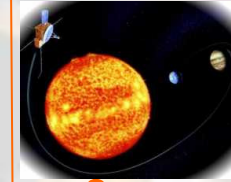
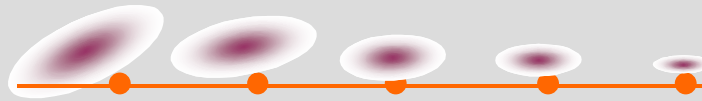
Le potentiel au point M est (principe de superposition) :



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_P} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_N}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} \right)$$

(avec :  $r_P = PM$  et  $r_N = NM \gg a$ )



Calcul des distances  $r_p$  et  $r_N$  :

D'après la relation de Chasles :  $\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = \vec{r} - a \vec{u}_z$

En élevant au carré :

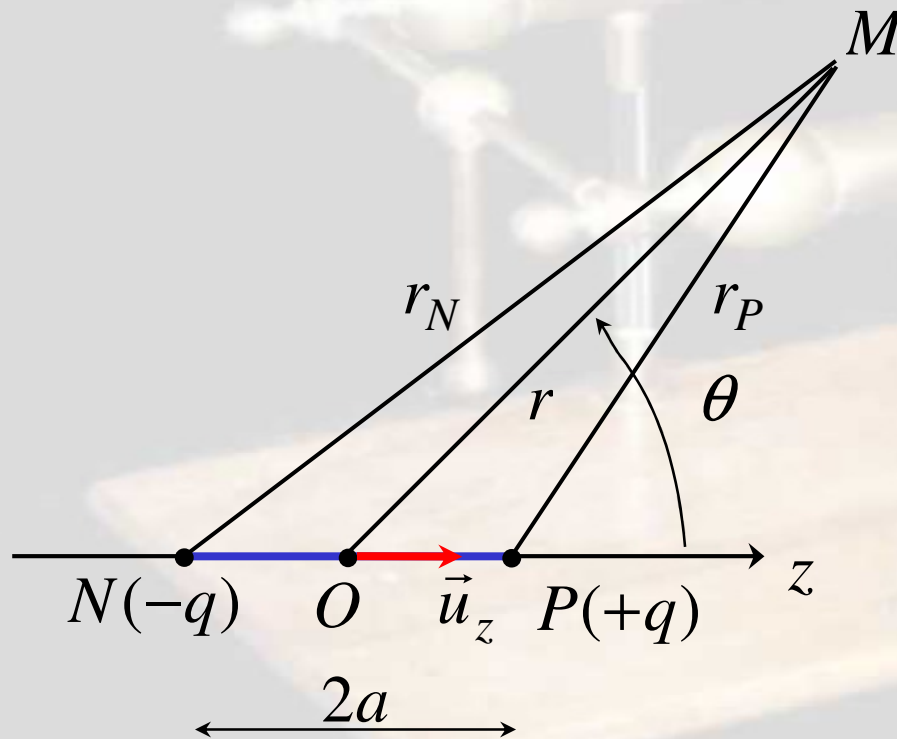
$$PM^2 = r^2 + a^2 - 2\vec{r} \cdot a \vec{u}_z$$

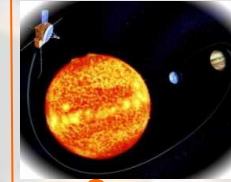
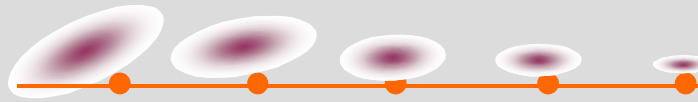
$$r_p^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

On calcule ensuite  $1 / r_p$  :

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}$$

$$\frac{1}{r_p} = \left( r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \right)^{-1/2}$$





On rappelle le développement limité (à l'ordre 1) de :

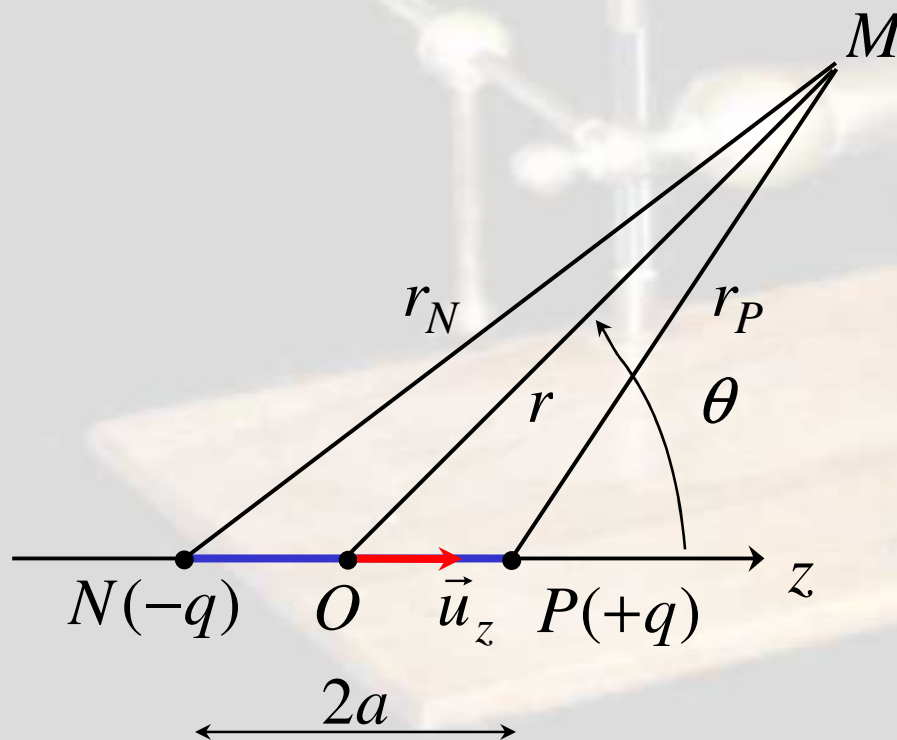
$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad (x \ll 1)$$

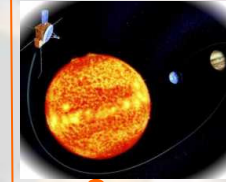
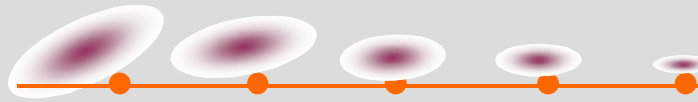
On pose  $x = a / r$  ( $x \ll 1$ ), alors :

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}$$

Un DL au 1<sup>er</sup> ordre en  $x$  donne :

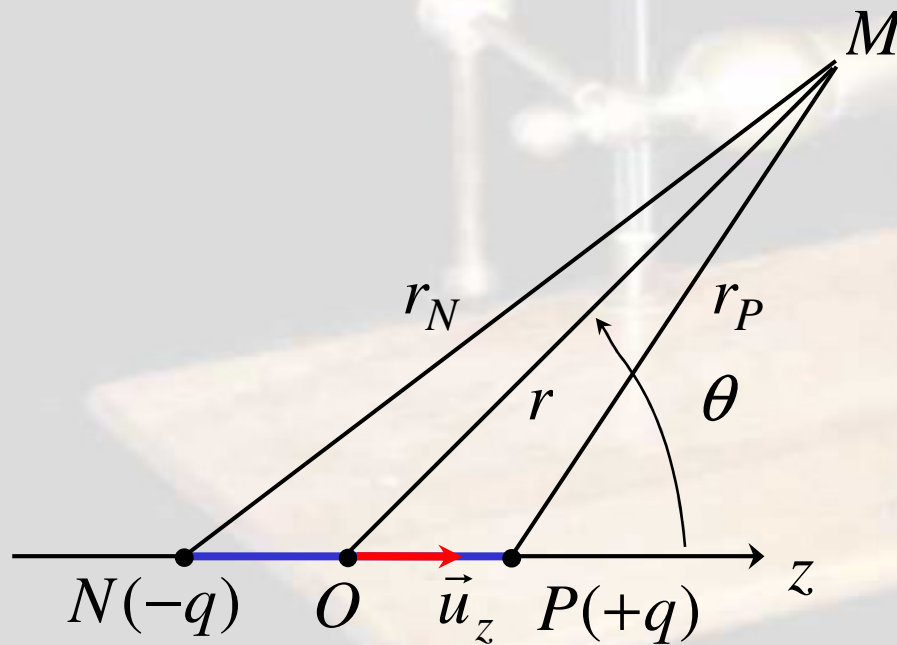
$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$





De la même manière (il suffit de remplacer  $\theta$  par  $\pi - \theta$  et donc  $\cos\theta$  par  $-\cos\theta$ ) :

$$\frac{1}{r_N} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$



Par conséquent :

$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} = 2 \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

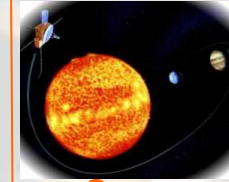
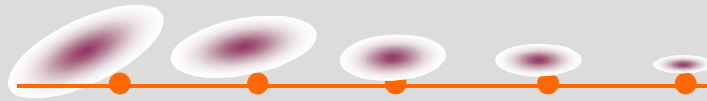
D'où le potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2aq)}{r^2} \cos \theta$$









Retour sur la définition du moment dipolaire :

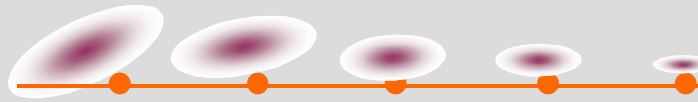
Le vecteur moment dipolaire est une caractéristique du dipôle électrostatique.  
 $p$  s'exprime en  $C.m$  dans le SI.

On définit plutôt le **Debye**, mieux adapté :

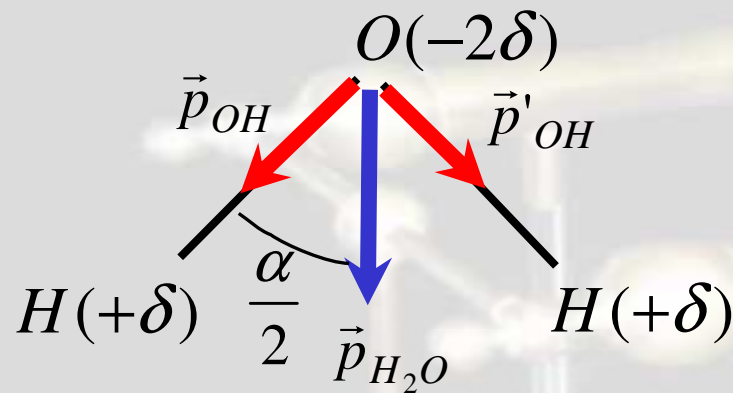
$$1 D = 3,33.10^{-30} C.m$$

**Exemple** : la molécule d'eau a un moment dipolaire  $p_{H_2O} = 1,85 D$  . En déduire les charges  $+\delta$  et  $-2\delta$  portées respectivement par les atomes d'hydrogène et par l'atome d'oxygène.

Données :  $\alpha = (OH, OH) = 104^\circ$  ;  $\ell = OH = 0,096 nm$



Le moment dipolaire total de la molécule est :



$$\vec{p}_{H_2O} = \vec{p}_{OH} + \vec{p}'_{OH}$$

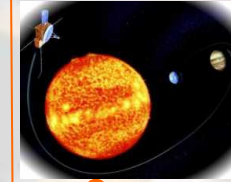
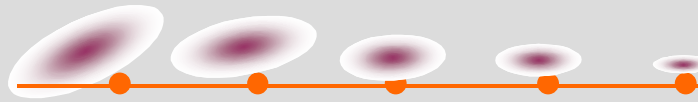
Avec :  $p_{OH} = p'_{OH} = \ell \delta$

Par conséquent :

$$p_{H_2O} = 2\ell \delta \cos \frac{\alpha}{2}$$

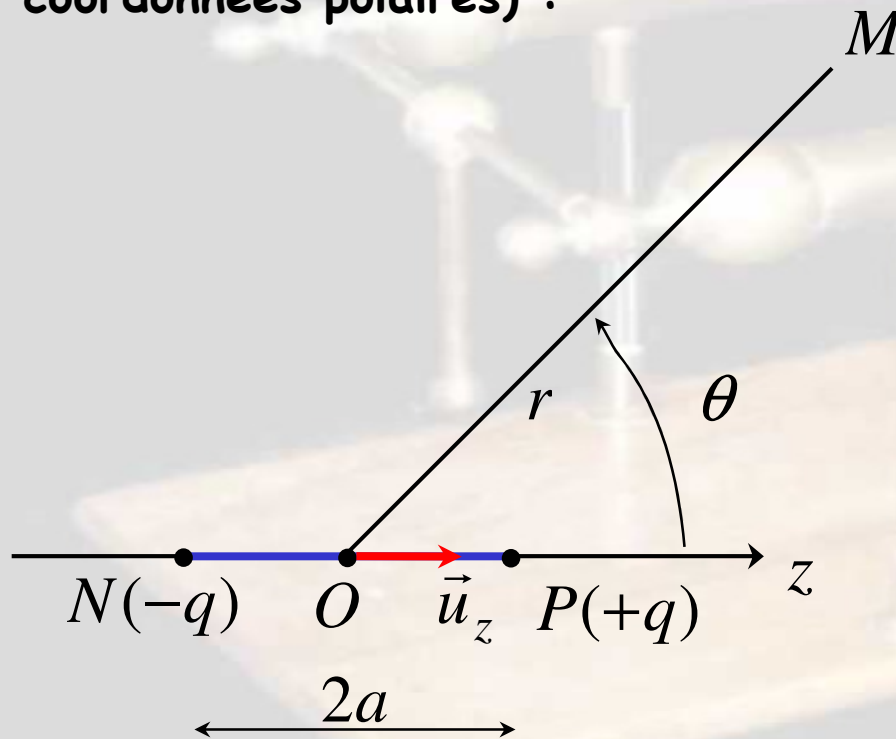
On en déduit :

$$\delta = \frac{p_{H_2O}}{2\ell \cos \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{e}{3} \quad (e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})$$

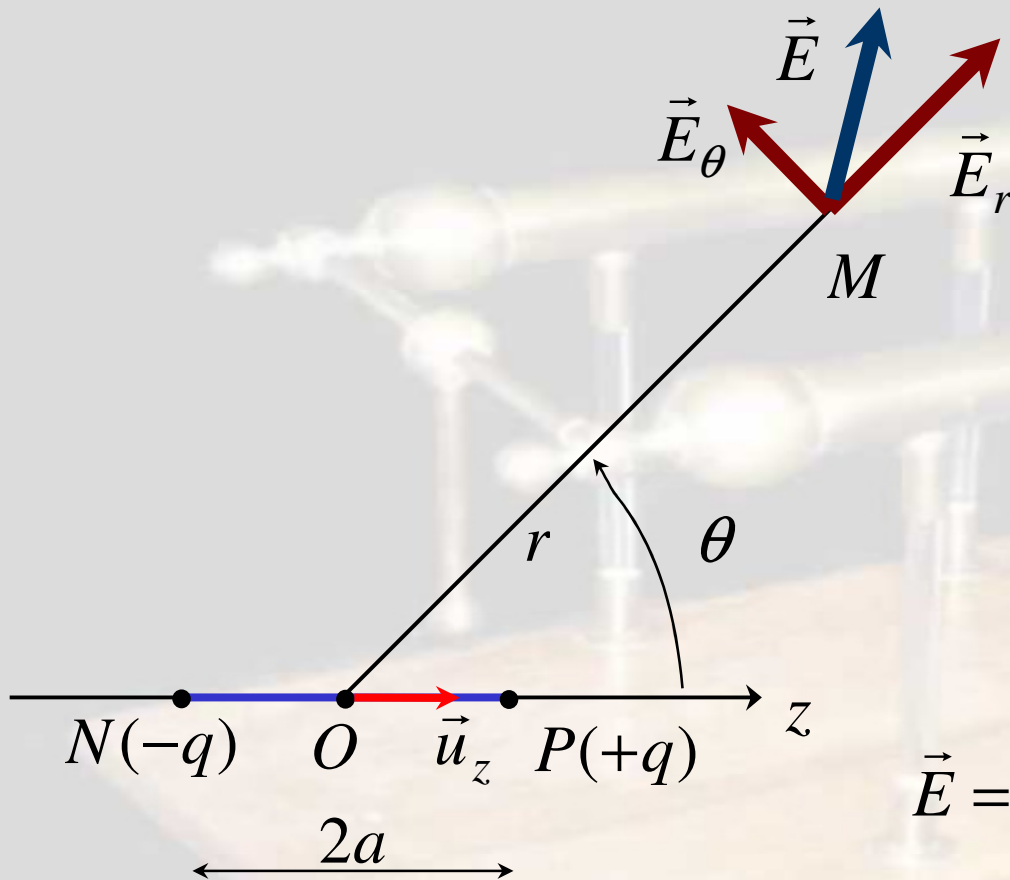
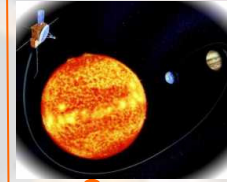
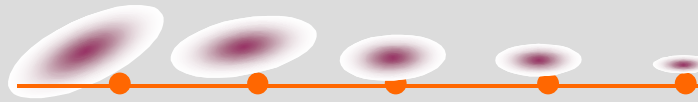


### III - Calcul du champ dans le cadre de l'approximation dipolaire

La relation intrinsèque  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  permet de calculer le champ (en coordonnées polaires) :



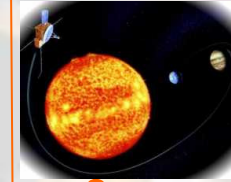
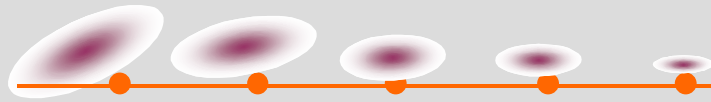
$$\left\{ \begin{array}{l} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{array} \right.$$



Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{array} \right.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$



## IV - Topographie du champ d'un dipôle

**Surfaces équipotentiellles :**

L'équation de la surface équipotentielle ( $\Sigma_0$ ) au potentiel  $V_0$  est :

$$\text{Pour } M \in (\Sigma_0) : V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta = V_0$$

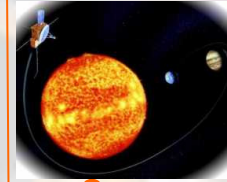
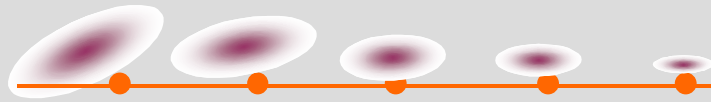
Soit l'équation en coordonnées polaires :

$$r^2 = A \cos \theta \quad (A = cste)$$

L'allure des **lignes équipotentiellles** est indiquée sur la figure suivante ; l'axe perpendiculaire à  $(Oz)$  et passant par  $O$  est l'équipotentielle zéro.

Par rotation autour de  $(Oz)$ , ces lignes engendrent les surfaces équipotentiellles.





## IV - Topographie du champ d'un dipôle

**Surfaces équipotentiellles :**

L'équation de la surface équipotentielle ( $\Sigma_0$ ) au potentiel  $V_0$  est :

$$\text{Pour } M \in (\Sigma_0) : V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta = V_0$$

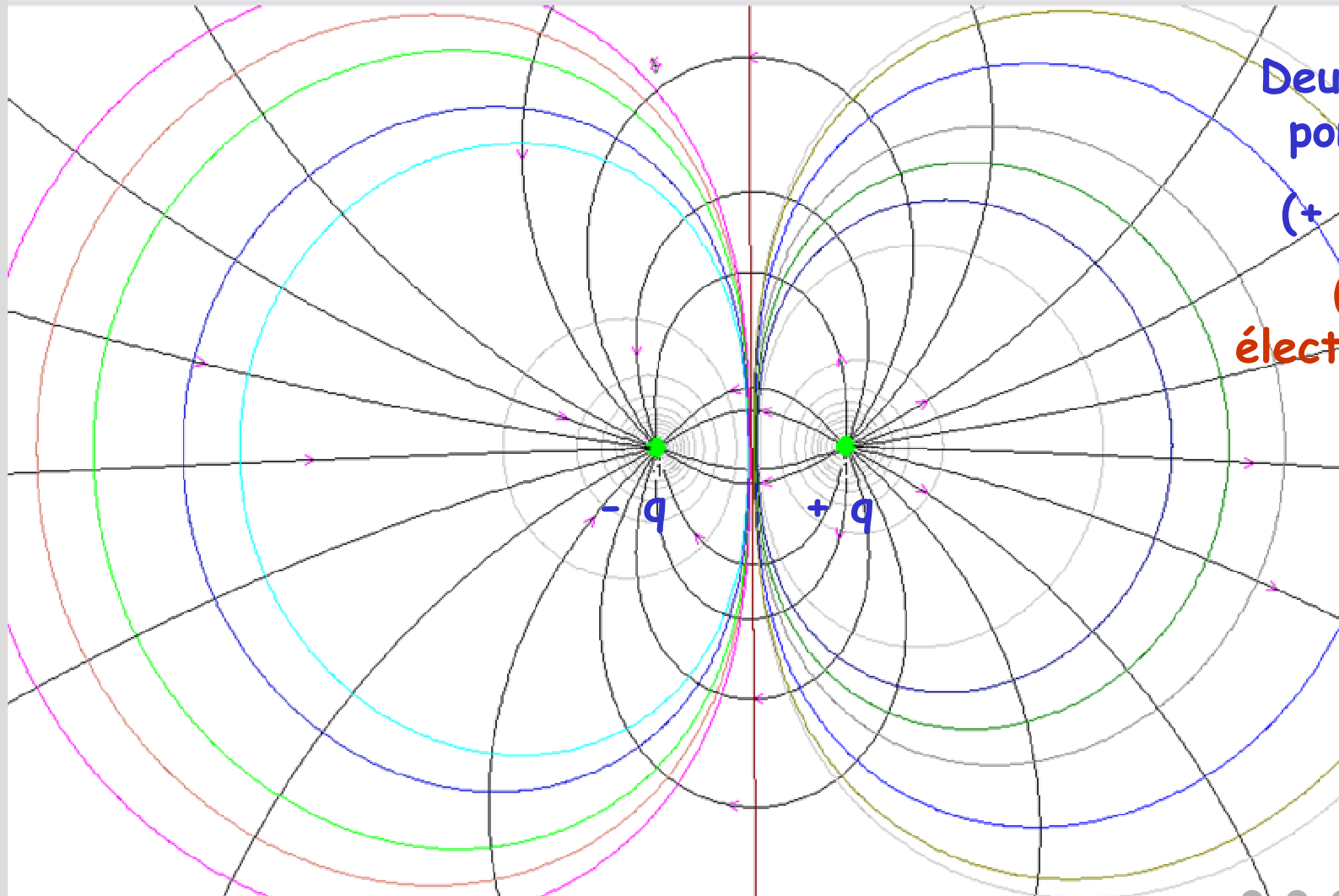
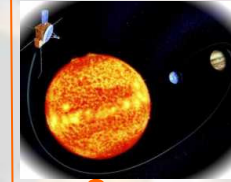
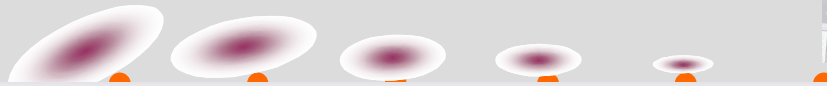
Soit l'équation en coordonnées polaires :

$$r^2 = A \cos \theta \quad (A = cste)$$

L'allure des **lignes équipotentiellles** est indiquée sur la figure suivante ; l'axe perpendiculaire à  $(Oz)$  et passant par  $O$  est l'équipotentielle zéro.

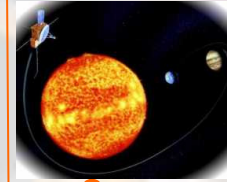
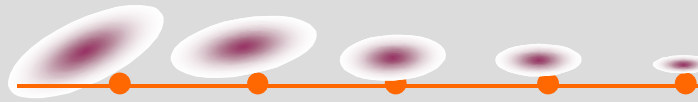
Par rotation autour de  $(Oz)$ , ces lignes engendrent les surfaces équipotentiellles.



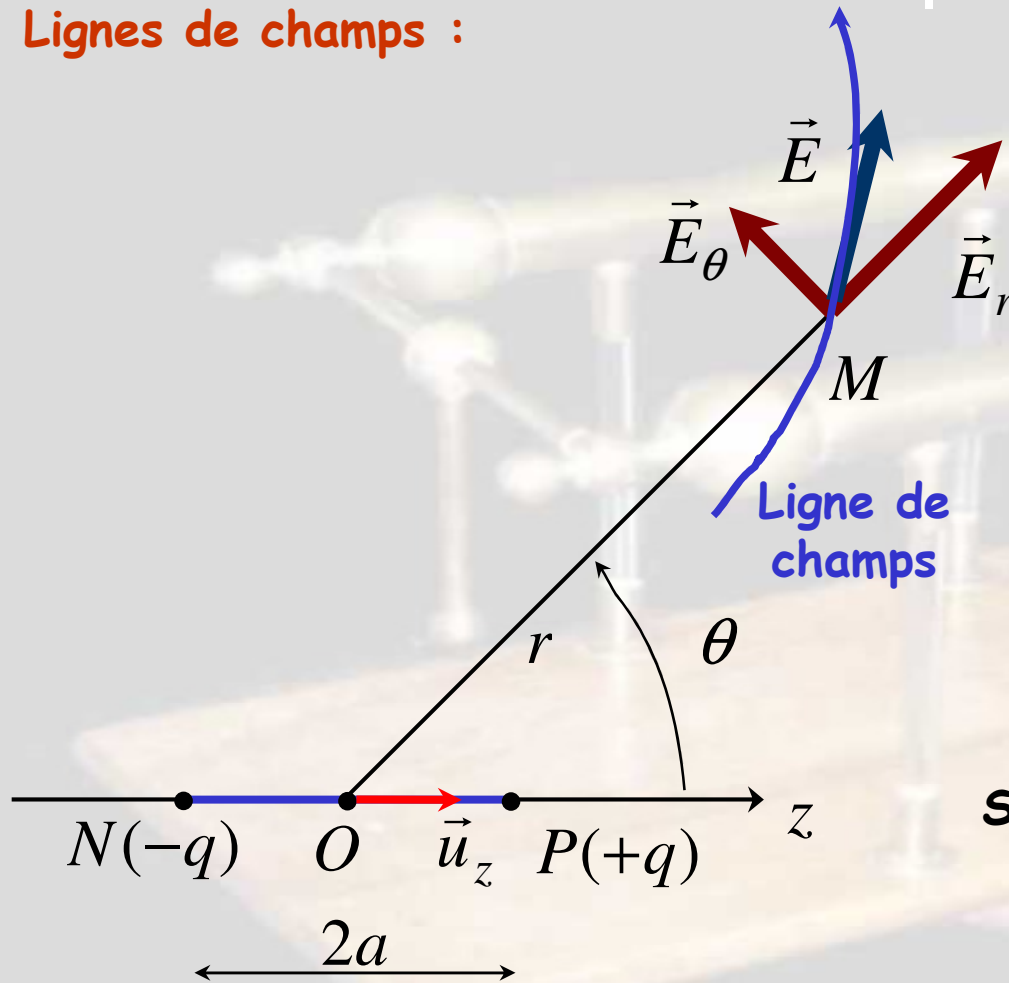


Deux charges  
ponctuelles  
(+ q et - q)  
(Dipôle  
électrostatique)





Lignes de champs :



Sur la ligne de champ passant par M :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

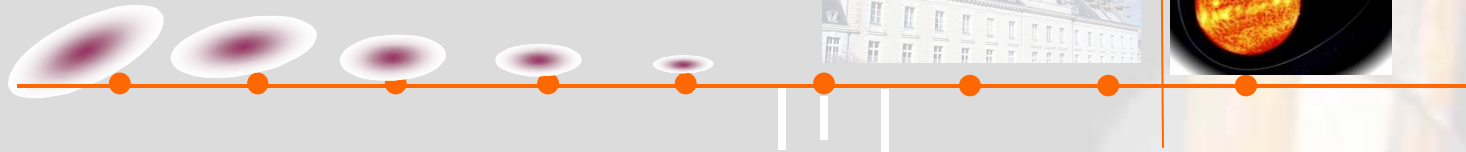
$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$$

$$dr E_\theta - r d\theta E_r = 0$$

Soit :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$





En remplaçant les coordonnées du champ par leurs expressions :

$$\frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta}$$

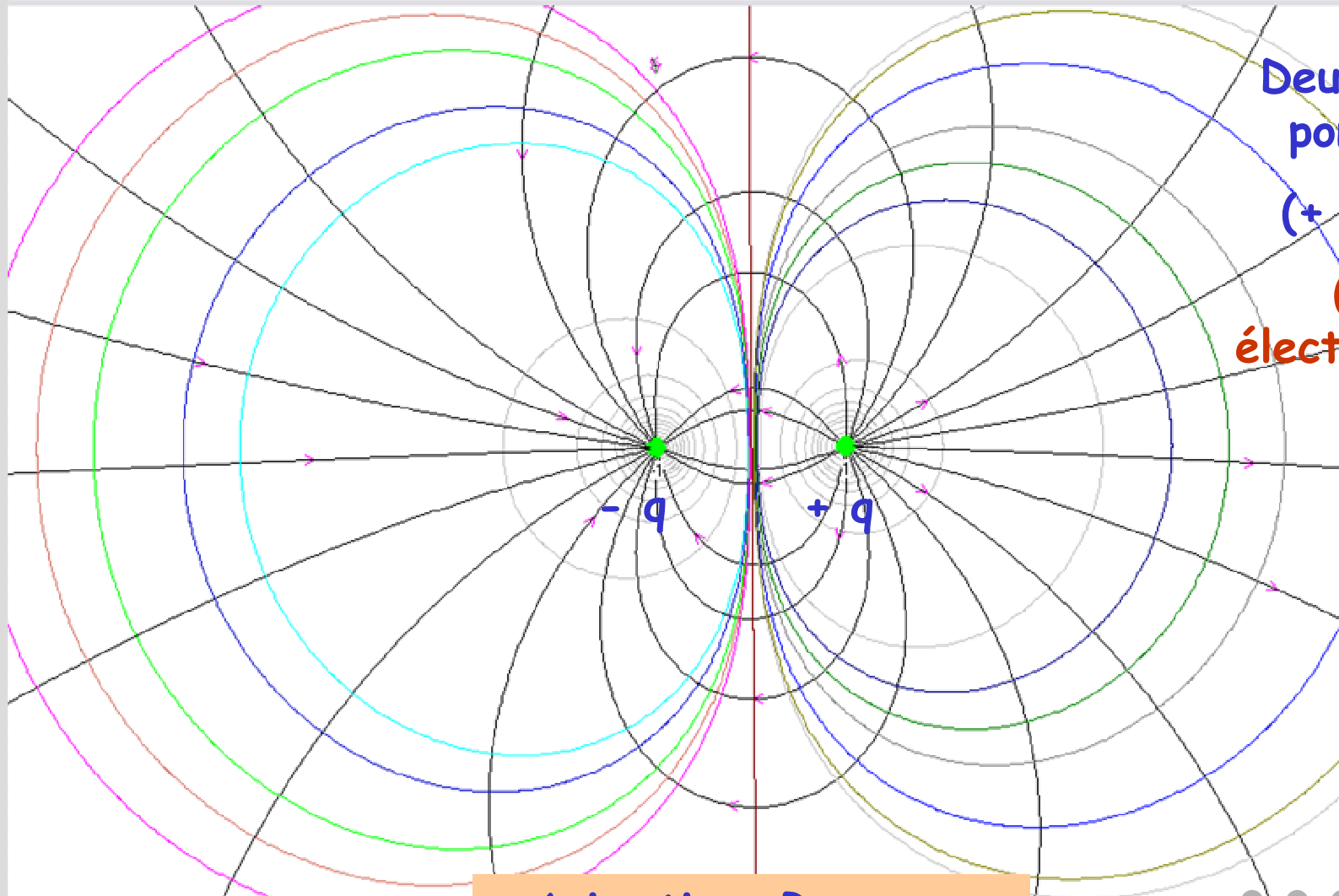
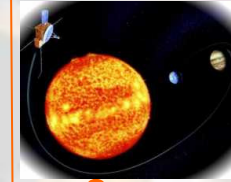
On sépare les variables :  $\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$

Soit :  $d(\ln r) = d(\ln(\sin \theta^2))$

On note  $r = r_0$  pour  $\theta = \pi / 2$ , alors, en intégrant, on obtient l'équation en coordonnées polaires des lignes de champs ( $r_0$  est un paramètre) :

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \ln(\sin \theta^2) \quad \text{soit} \quad \boxed{r = r_0 \sin \theta^2}$$

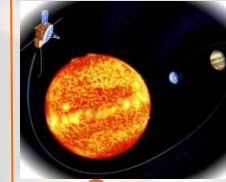
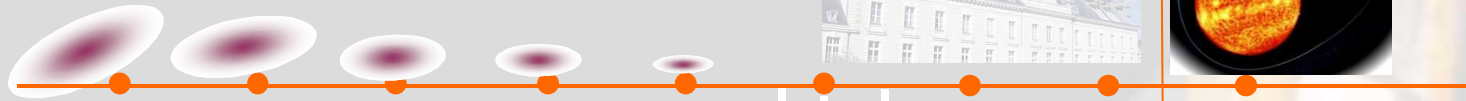




Deux charges  
ponctuelles  
(+ q et - q)  
(Dipôle  
électrostatique)

Animations Rousseau





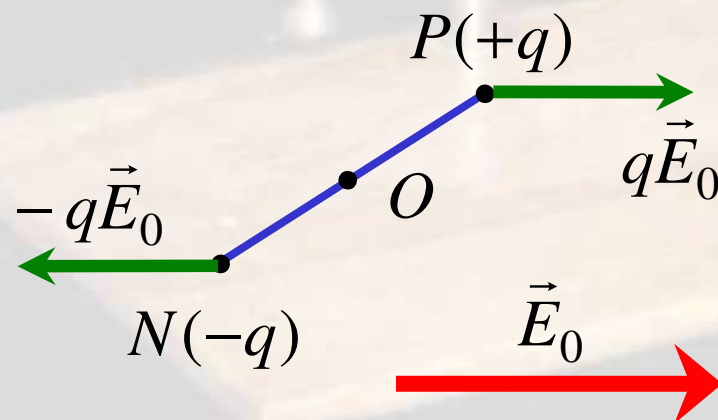
## V - Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle

On considère un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique  $E_0$  qui peut être supposé **uniforme** à l'échelle du dipôle.

Quel est l'effet de ce champ sur le dipôle ?

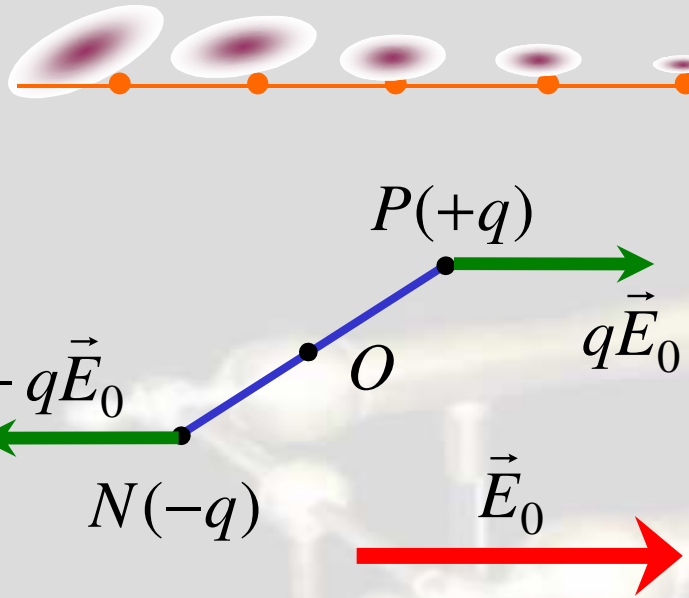
Systeme étudié : le dipôle (rigide)

Référentiel d'étude : celui du laboratoire (supposé galiléen)



Le dipôle est soumis aux deux forces  $q\vec{E}_0$  et  $-q\vec{E}_0$  de résultante nulle.

Le dipôle est globalement soumis à un « **couple de forces** », dont le moment par rapport à O vaut :



Sous l'effet d'un champ électrique, le dipôle se met à tourner afin de s'aligner selon le sens du champ (p et  $\vec{E}_0$  dans le même sens, position d'équilibre stable).

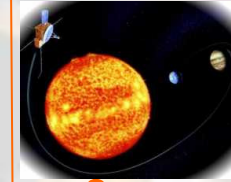
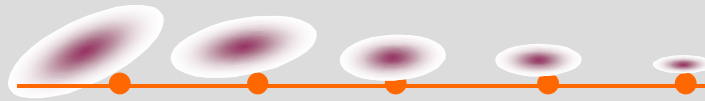
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge q\vec{E}_0 + \vec{ON} \wedge (-q\vec{E}_0)$$

$$\vec{M}_O = (\vec{OP} - \vec{ON}) \wedge q\vec{E}_0 = q\vec{NP} \wedge \vec{E}_0$$

Soit :

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$



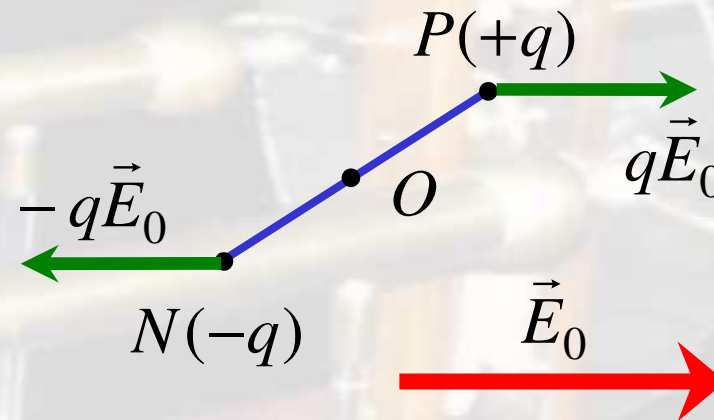


## Étude énergétique :

Soit  $V$  le potentiel dont dérive le champ  $E_0$  ; l'énergie potentielle du dipôle (rigide) dans ce champ est :

$$E_p = qV(P) + (-q)V(N)$$

$$E_p = q[V(P) - V(N)]$$



On rappelle que ( $E_0$  est un champ de gradient) :  $\vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = -dV$

Par conséquent, avec  $dV = V(P) - V(N)$  :  $d\vec{r} = \vec{OP} - \vec{ON} = \vec{NP}$

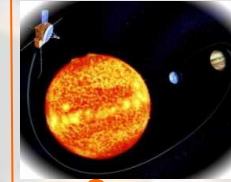
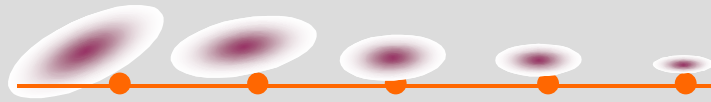
Et donc :

$$E_p = q(-\vec{E}_0 \cdot \vec{NP})$$

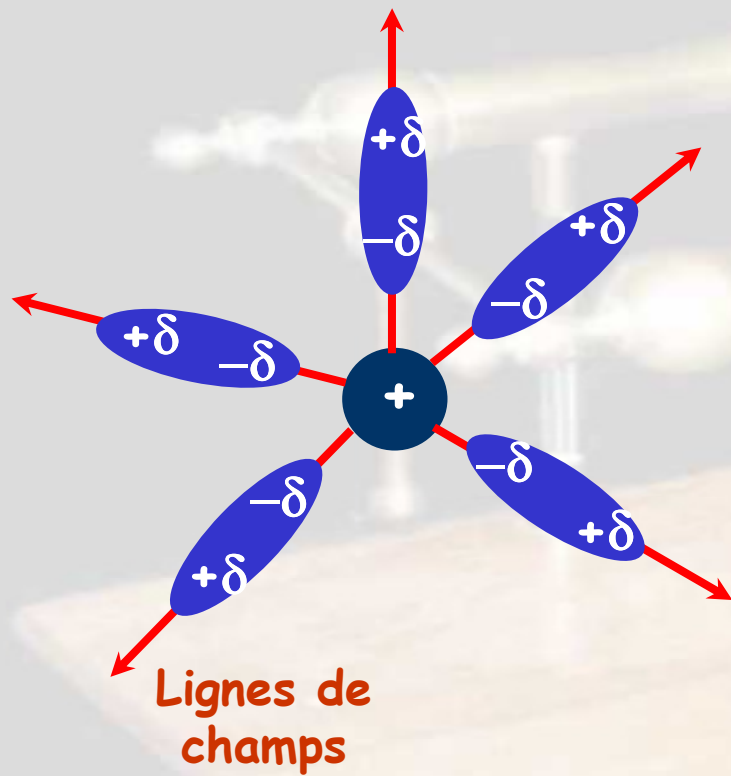
Soit

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

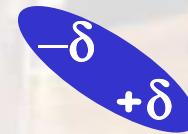
$E_p$  est minimale (position d'équilibre stable) quand  $p$  et  $E_0$  ont même sens.



Application (solvatation des ions) :

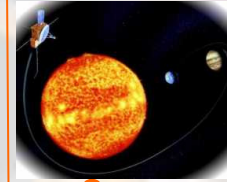
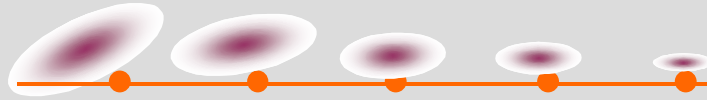


**Ion positif (Na<sup>+</sup> par exemple)**



**Molécule polaire H<sub>2</sub>O**



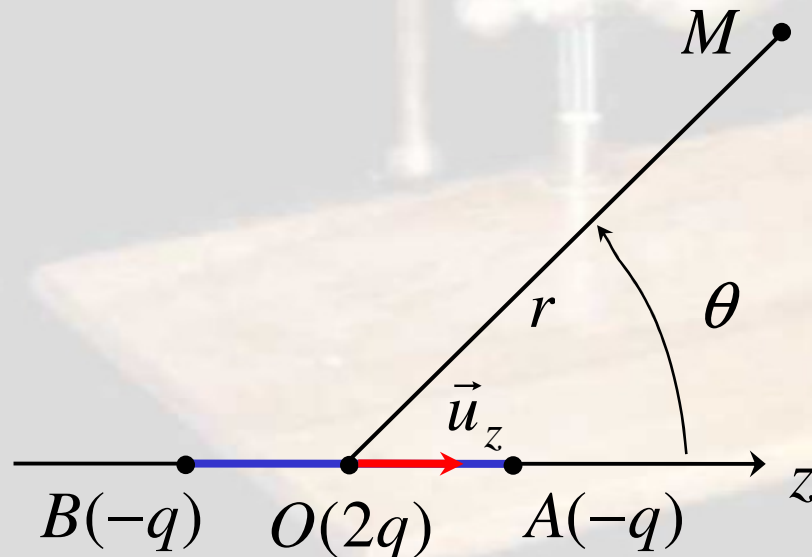


## VI - Quadripôle électrostatique

Exercice n°5 (modèle de la molécule de  $\text{CO}_2$ ) :

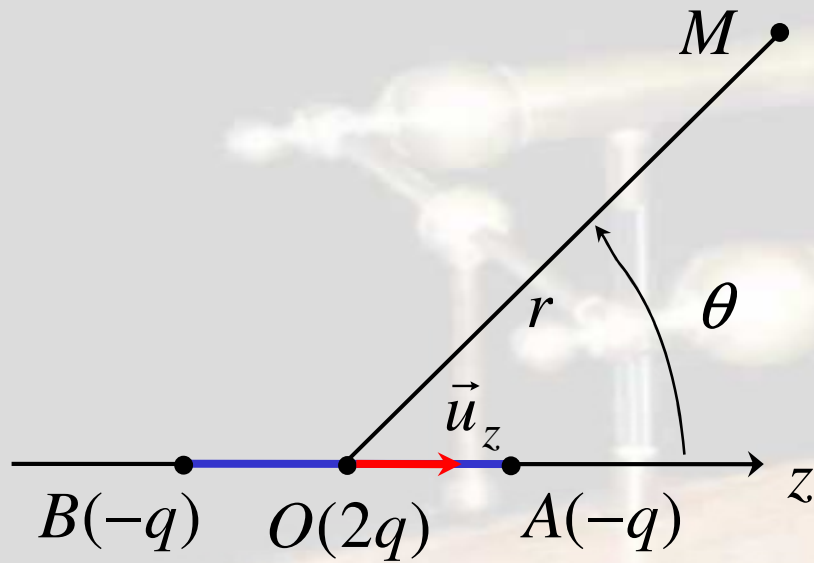
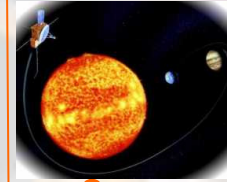
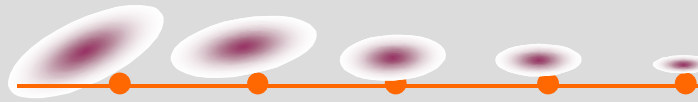
Soit un ensemble de trois charges alignées :  $2q$  en  $O$ ,  $-q$  en  $A(+a,0)$  et  $-q$  en  $B(-a,0)$ .

Calculer le potentiel  $V$  puis le champ  $E$  en un point  $M$  de l'espace situé à la distance  $r$  de  $O$ , en supposant  $r \gg a$ .



On rappelle le développement limité (à l'ordre 2, pour  $x \ll 1$ ) de :

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

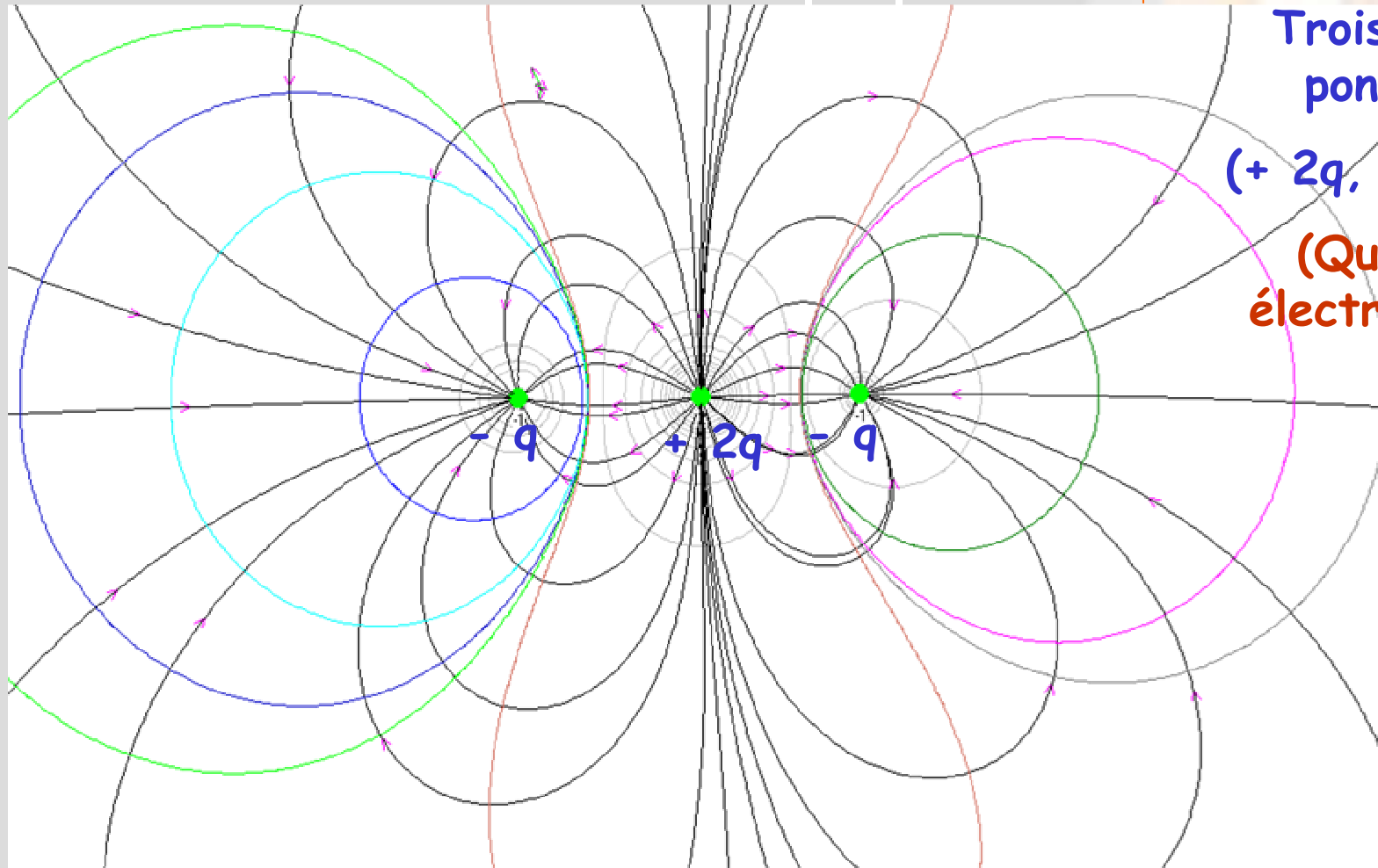
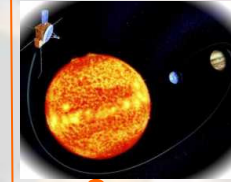
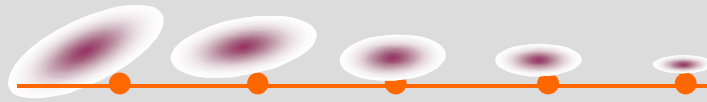


$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{r^3} (1 - 3\cos^2 \theta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

**Topographie** : voir diapositive suivante





Trois charges  
ponctuelles  
( $+ 2q, - q$  et  $- q$ )  
(Quadripôle  
électrostatique)

