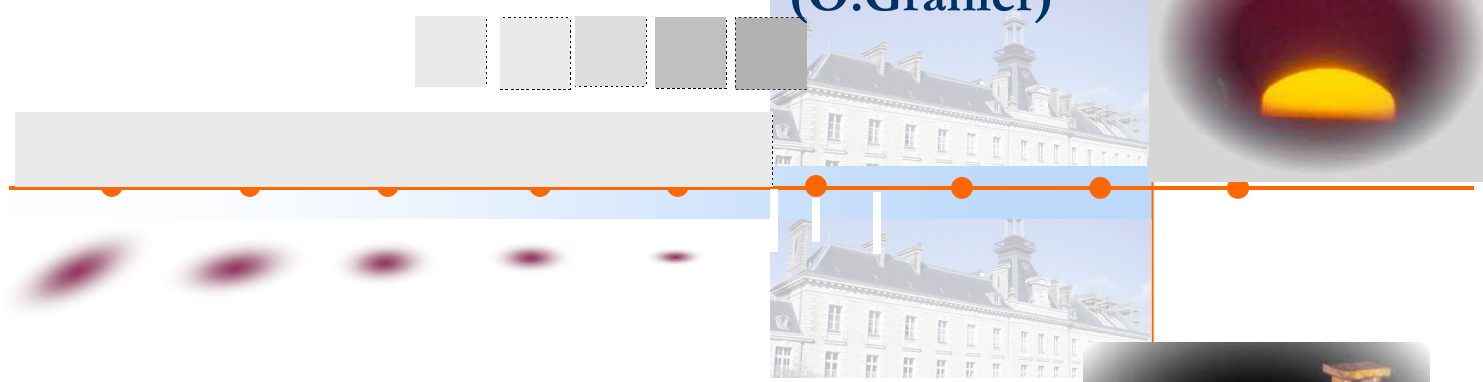


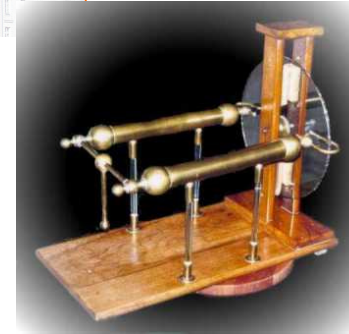


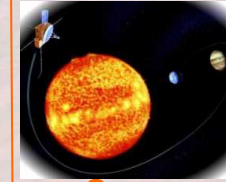
(O.Granier)



Le champ magnétique

Le théorème d'Ampère





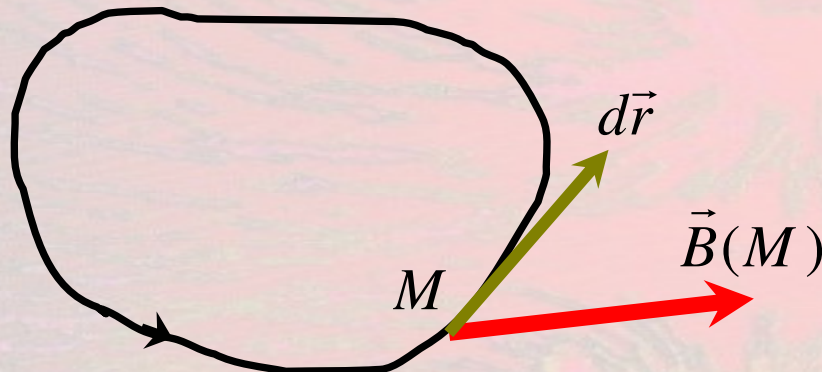
I - Énoncé du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est « l'équivalent » du théorème de Gauss.

Il permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courants lorsque celle-ci possède des symétries « fortes ».

1 - Fil infini et circulation du champ magnétique :

La circulation du champ magnétique est définie par :



$$C = \oint_{\text{contour}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r}$$





Pour le champ électrostatique, cette circulation est nulle puisque :

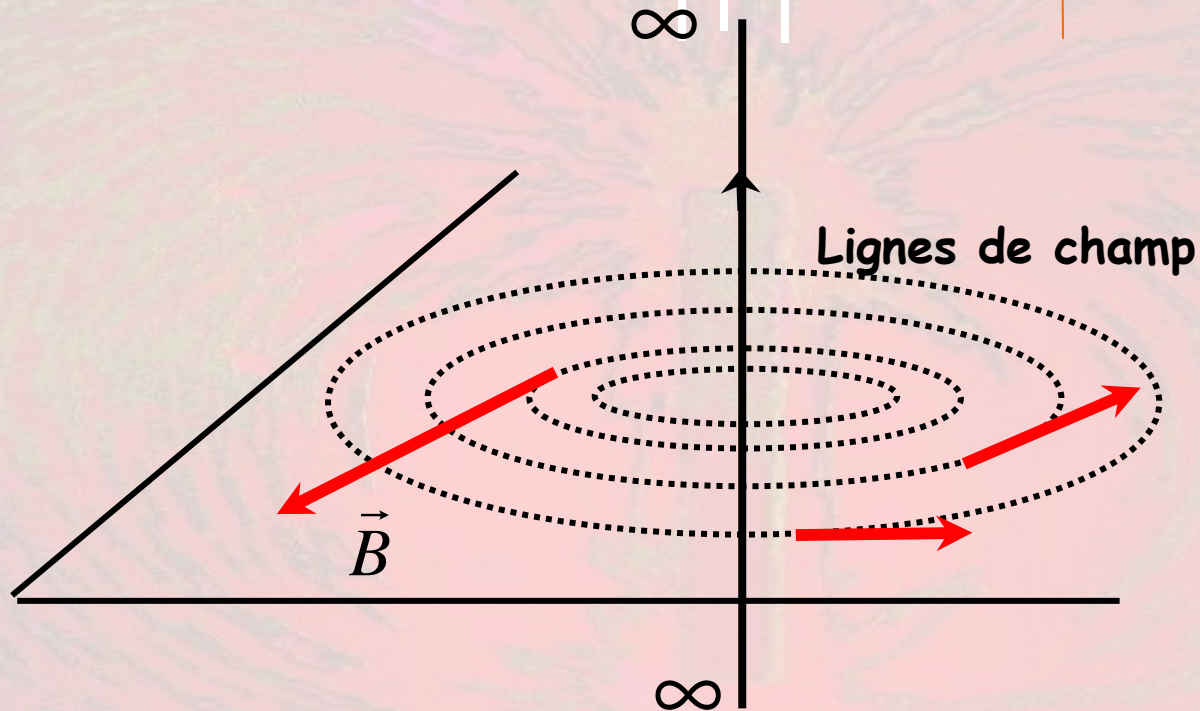
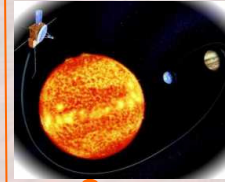
$$C = \oint_{\text{contour}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_{\text{contour}} \left(-\overrightarrow{\text{grad}V} \right) \cdot d\vec{r} = -\oint_{\text{contour}} dV = 0$$

Si l'on regarde la carte du champ magnétique créé par un fil infini (ou une spire circulaire), on constate que la **circulation du champ magnétique le long d'une ligne de champ (fermée) orientée n'est pas nulle.**

Afin d'évaluer cette circulation, on prend le cas du champ magnétique créé par un fil infini, qui vaut :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

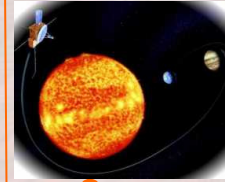
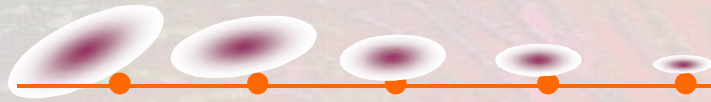




$$d\vec{r} = (dr) \vec{u}_r + (rd\theta) \vec{u}_\theta + (dz) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

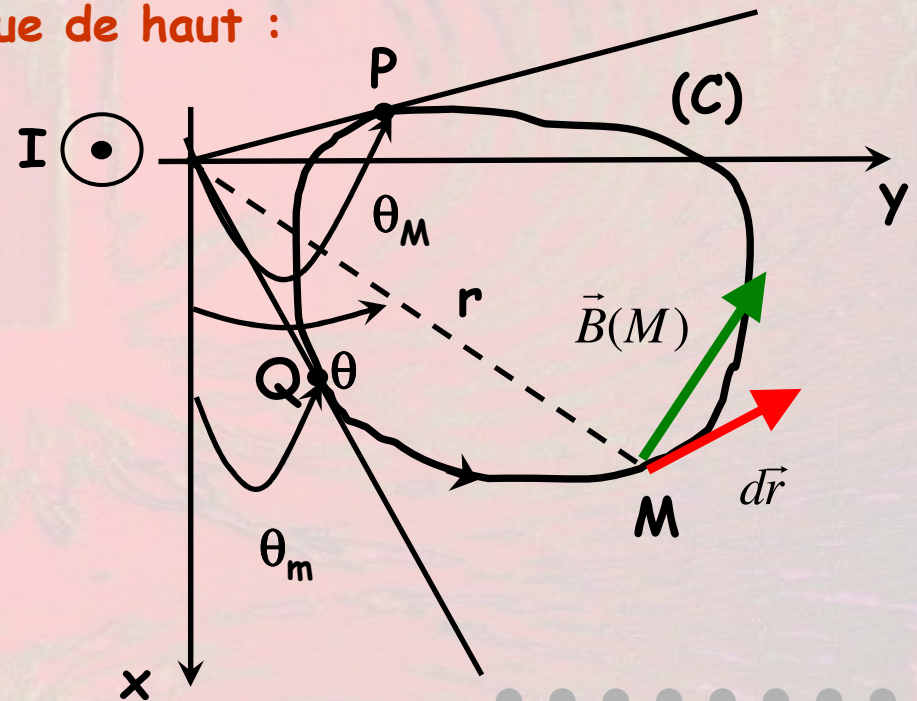
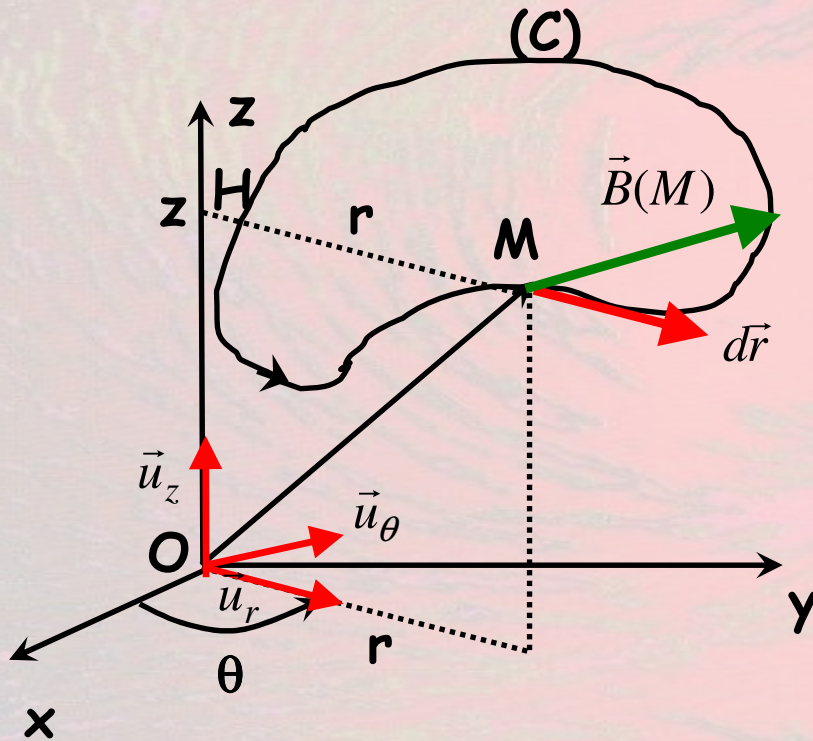


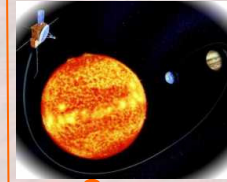


1^{er} cas : le contour fermé n'enlace pas le fil infini

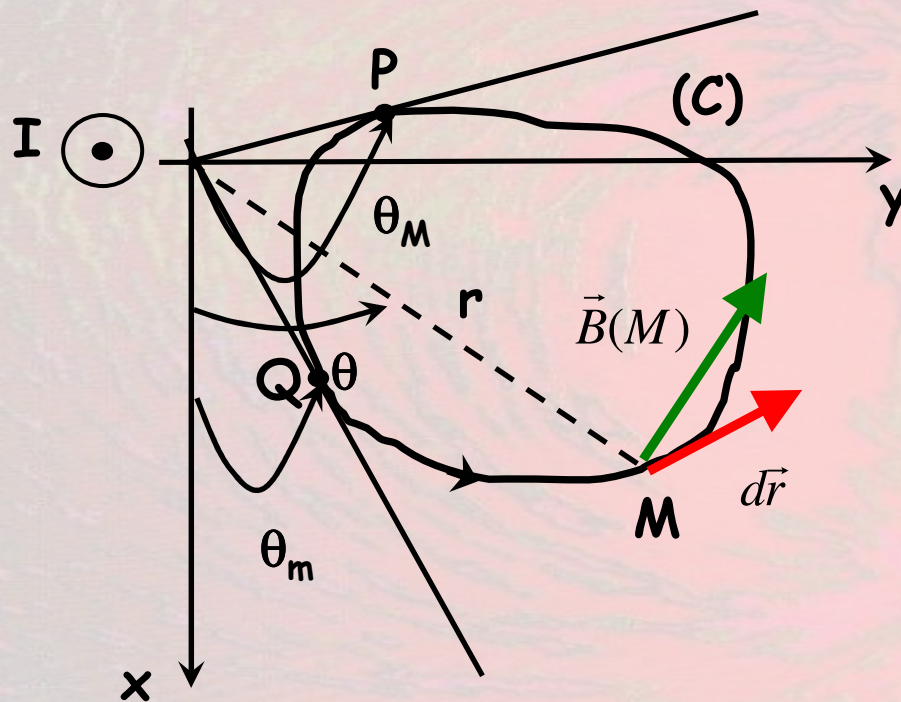
Soit (C) un contour fermé orienté de telle manière que la normale au contour soit orienté comme le fil infini.

Vue de haut :



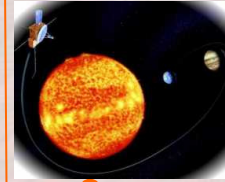


La circulation du champ le long du contour (C) est alors :



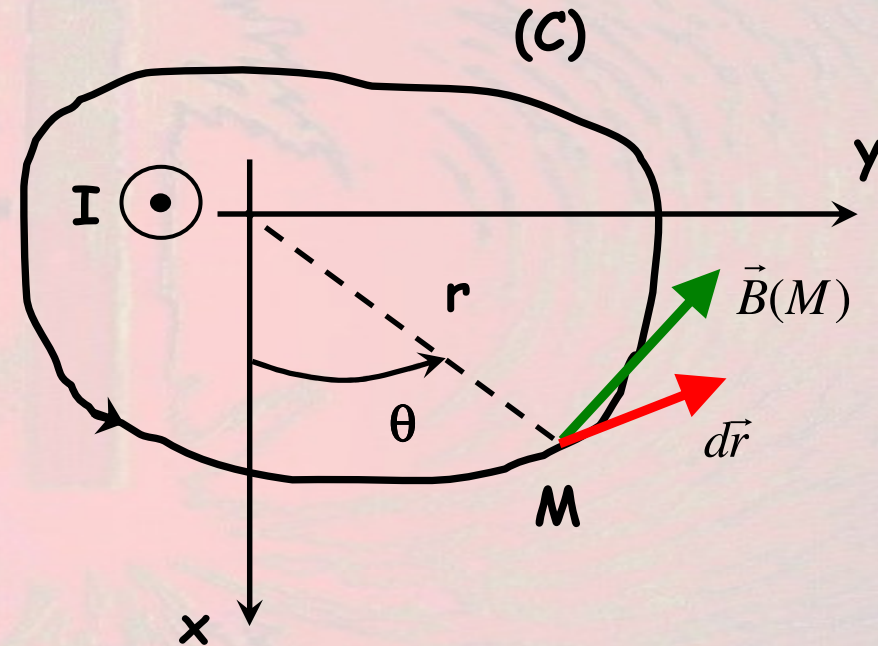
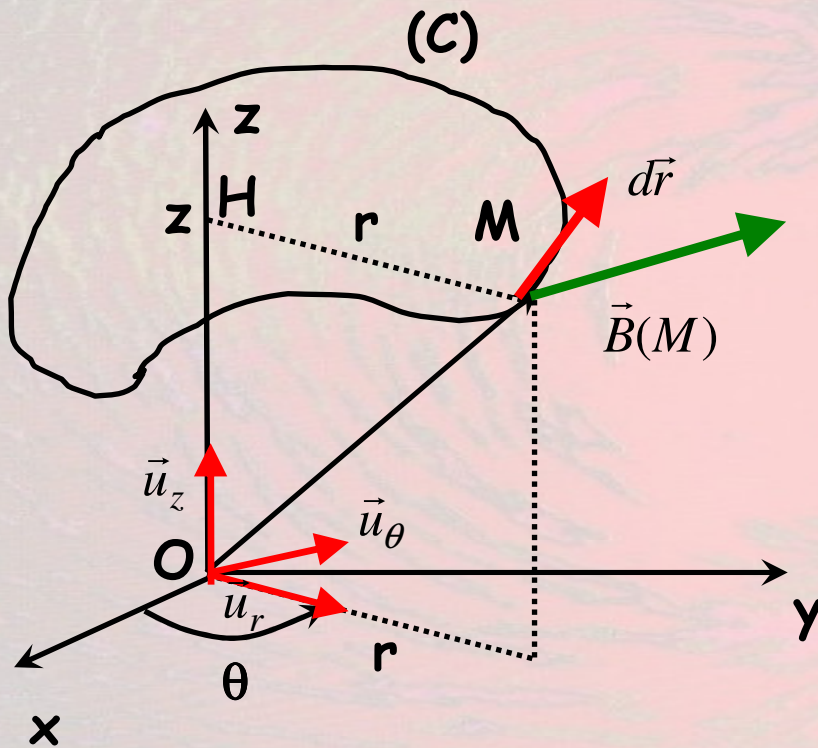
$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{(C)} d\theta$$

$$C = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_Q^P d\theta + \int_P^Q d\theta \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [(\theta_M - \theta_m) + (\theta_m - \theta_M)] = 0$$



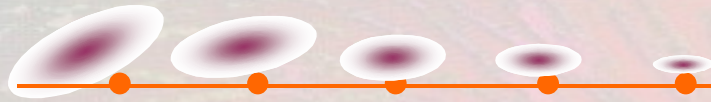
2^{ème} cas : le contour fermé enlace le fil infini

Vue de haut :



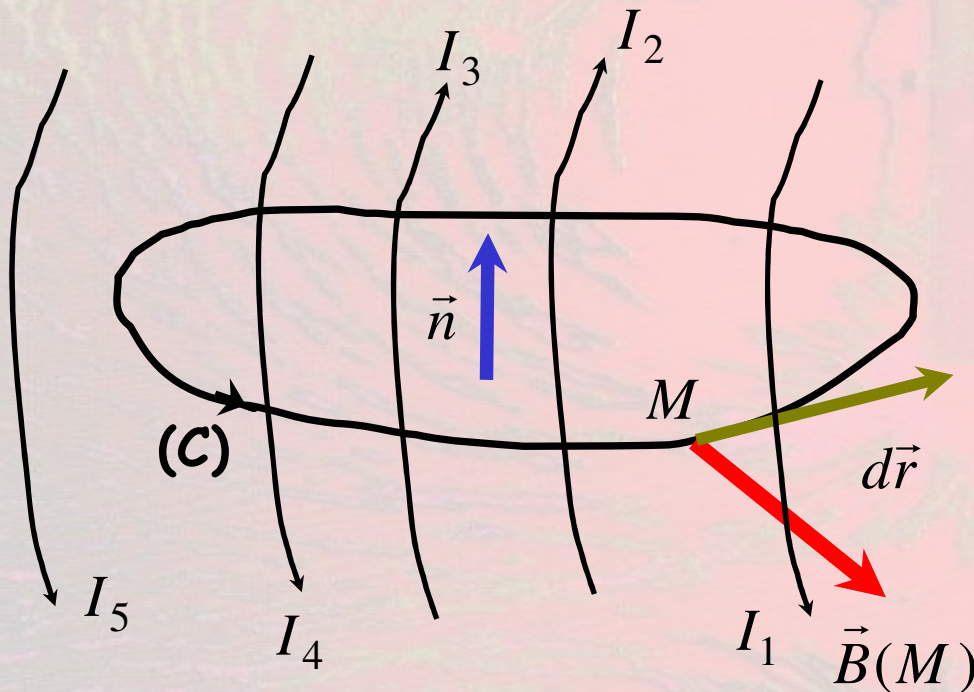
$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{(C)} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I$$





2 - Énoncé du théorème d'Ampère :

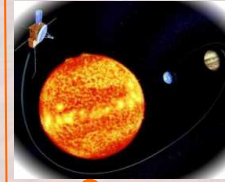
On considère un certain nombre de fils parcourus par des courants d'intensités I_1, I_2, \dots . Soit (C) une courbe fermée orientée enlaçant certains de ces courants et \vec{n} le vecteur normal déduit de la règle de la main droite.



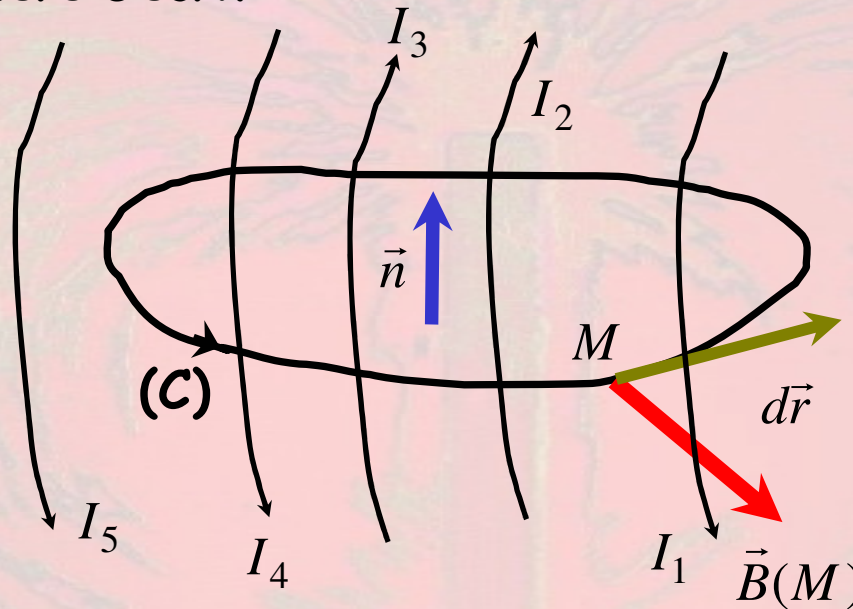
On compte positivement les courants dirigés dans le même sens que \vec{n} et négativement les courants de sens contraire.

$$C = \oint_{\text{contour}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r}$$





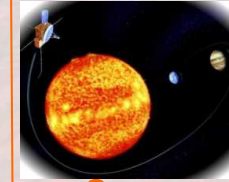
Le théorème d'Ampère s'écrit :



$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \mu_0 (-I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$$

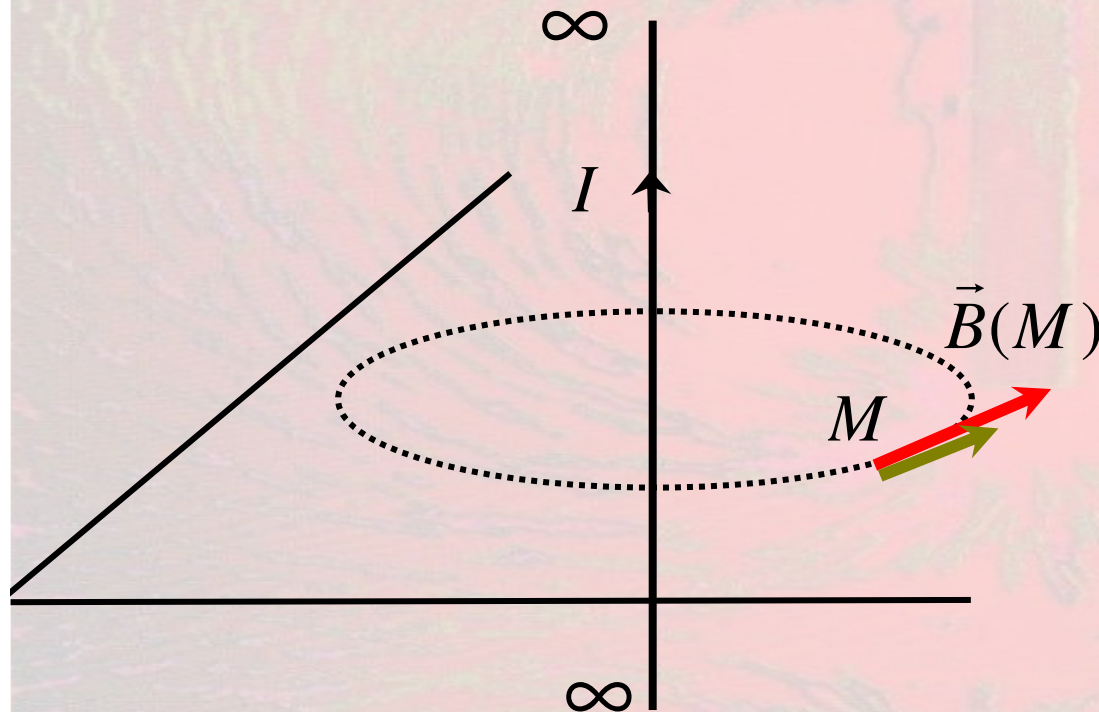
$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacées}}$$





II - Exemples d'applications du théorème d'Ampère

1 - Le fil infini :



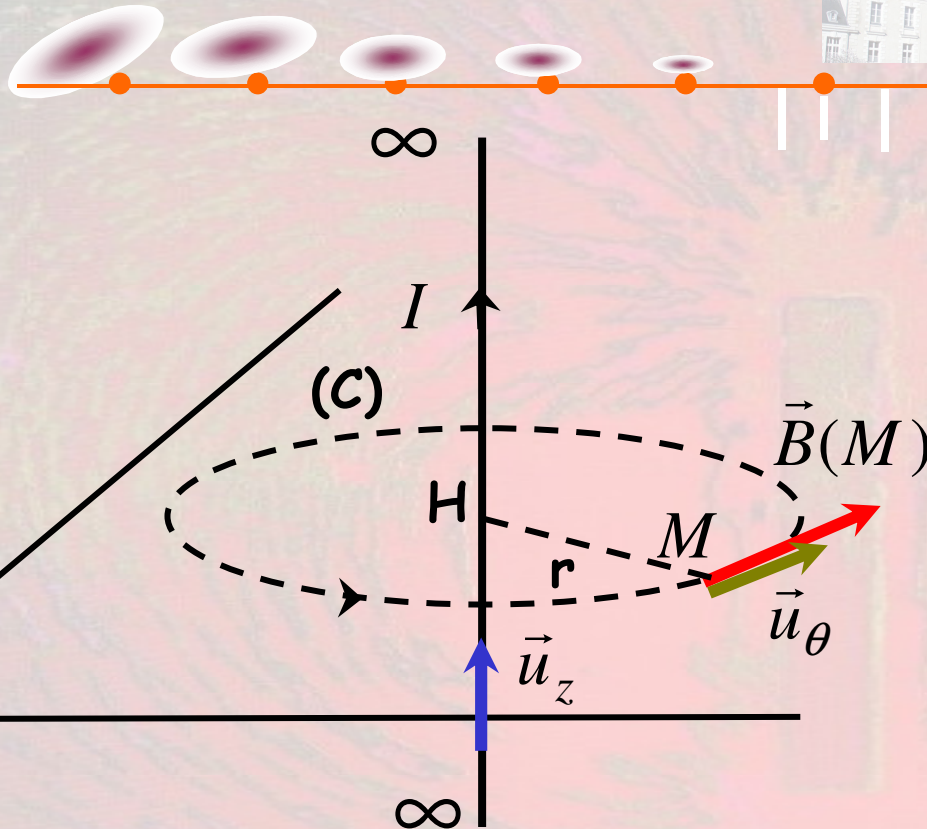
Étude des invariances et des symétries :

Invariance par rotation autour de (Oz) et par translation autour de z . Le champ ne dépend pas des coordonnées θ et z .

Le plan contenant le fil et le point M est un plan (π^+) , par conséquent le champ s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$





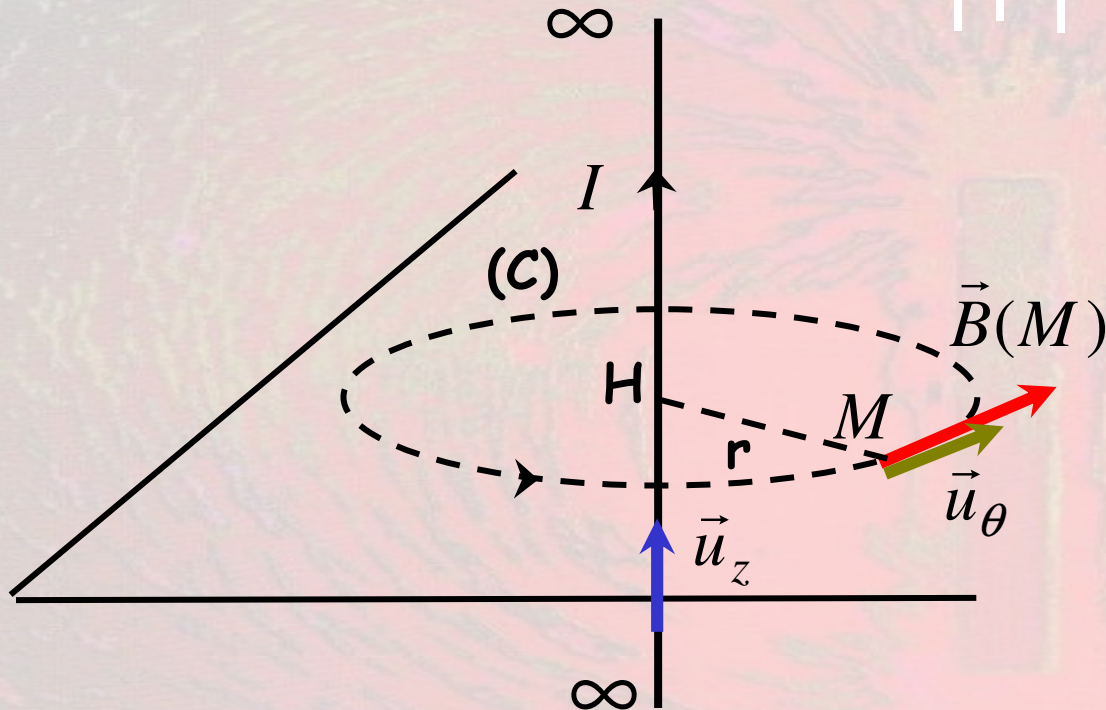
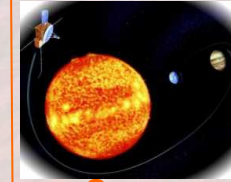
Choix du contour (C) : on choisit le cercle de rayon r , de centre H (passant donc par M) orienté de telle manière que le vecteur normal soit \vec{u}_z .

La circulation C du champ sur ce contour vaut :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_{(C)} B(r) \vec{u}_\theta \cdot (r d\theta) \vec{u}_\theta = rB(r) \oint_{(C)} d\theta$$

$$C = 2\pi rB(r)$$





Le théorème d'Ampère permet d'écrire :

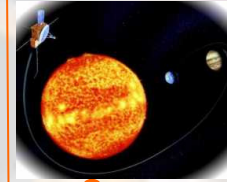
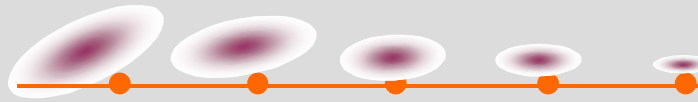
$$C = 2\pi rB(r) = \mu_0 I$$

On retrouve bien l'expression obtenue à partir de la loi de Biot et Savart :

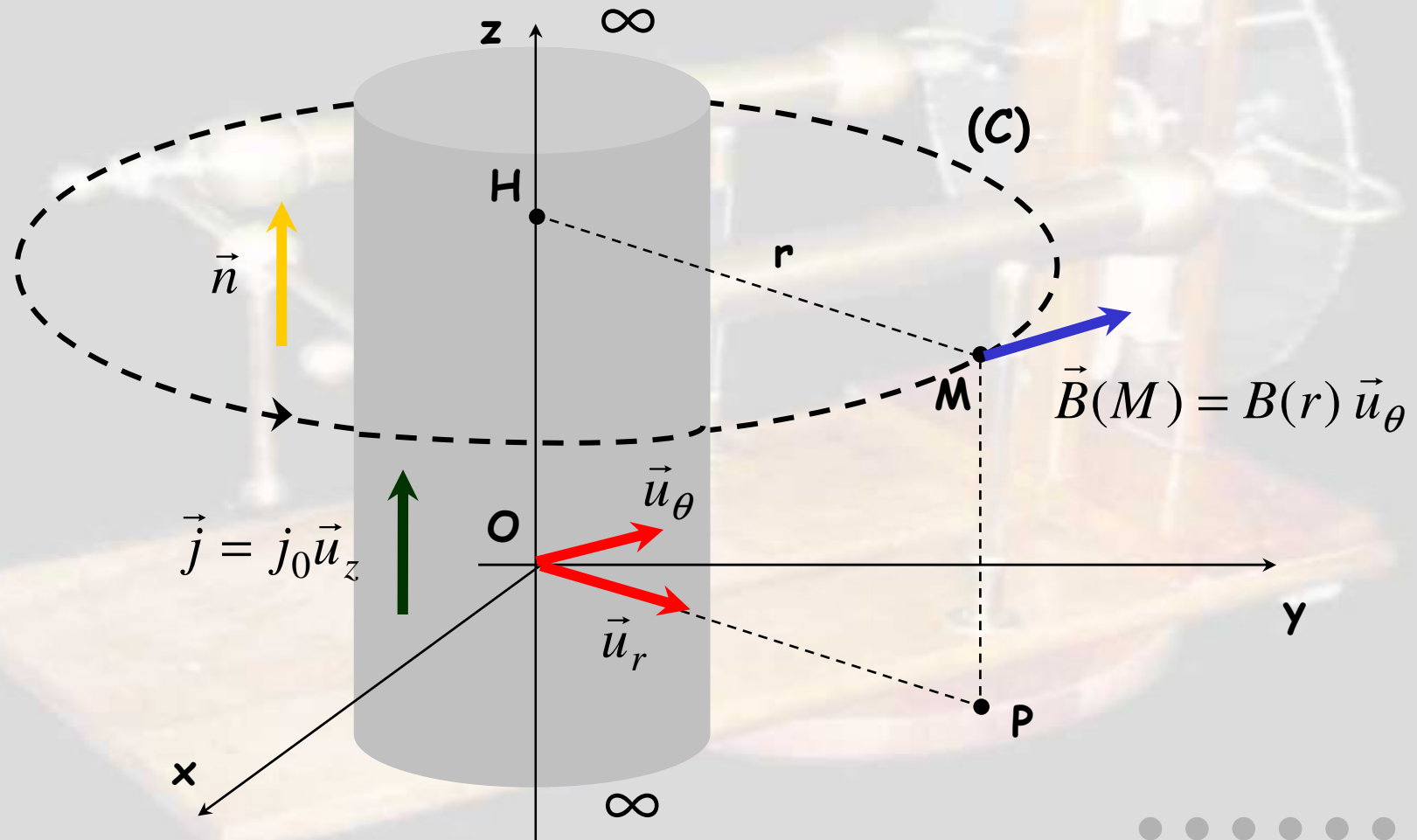
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

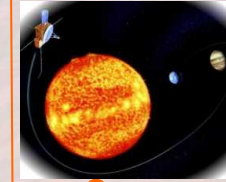
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$$





2 - Cylindre infini de rayon R : (densité de courant uniforme)





Circulation le long du cercle C de rayon r et de centre H :

$$C = 2\pi rB(r)$$

Application du théorème d'Ampère :

Pour $r > R$: $I_{enl} = \pi R^2 j_0 = I_0$ (intensité totale à travers le cylindre)

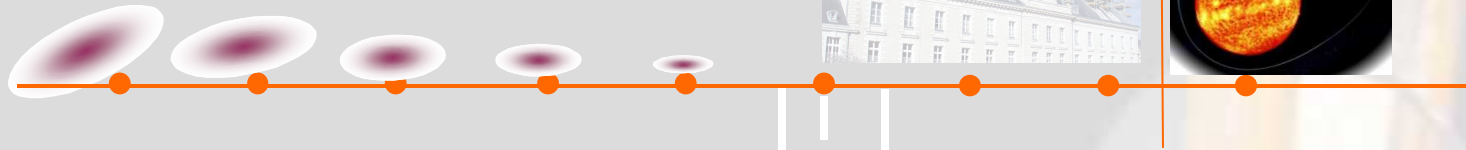
$$C = 2\pi rB(r) = \mu_0 I_0 \quad ;$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{r}$$

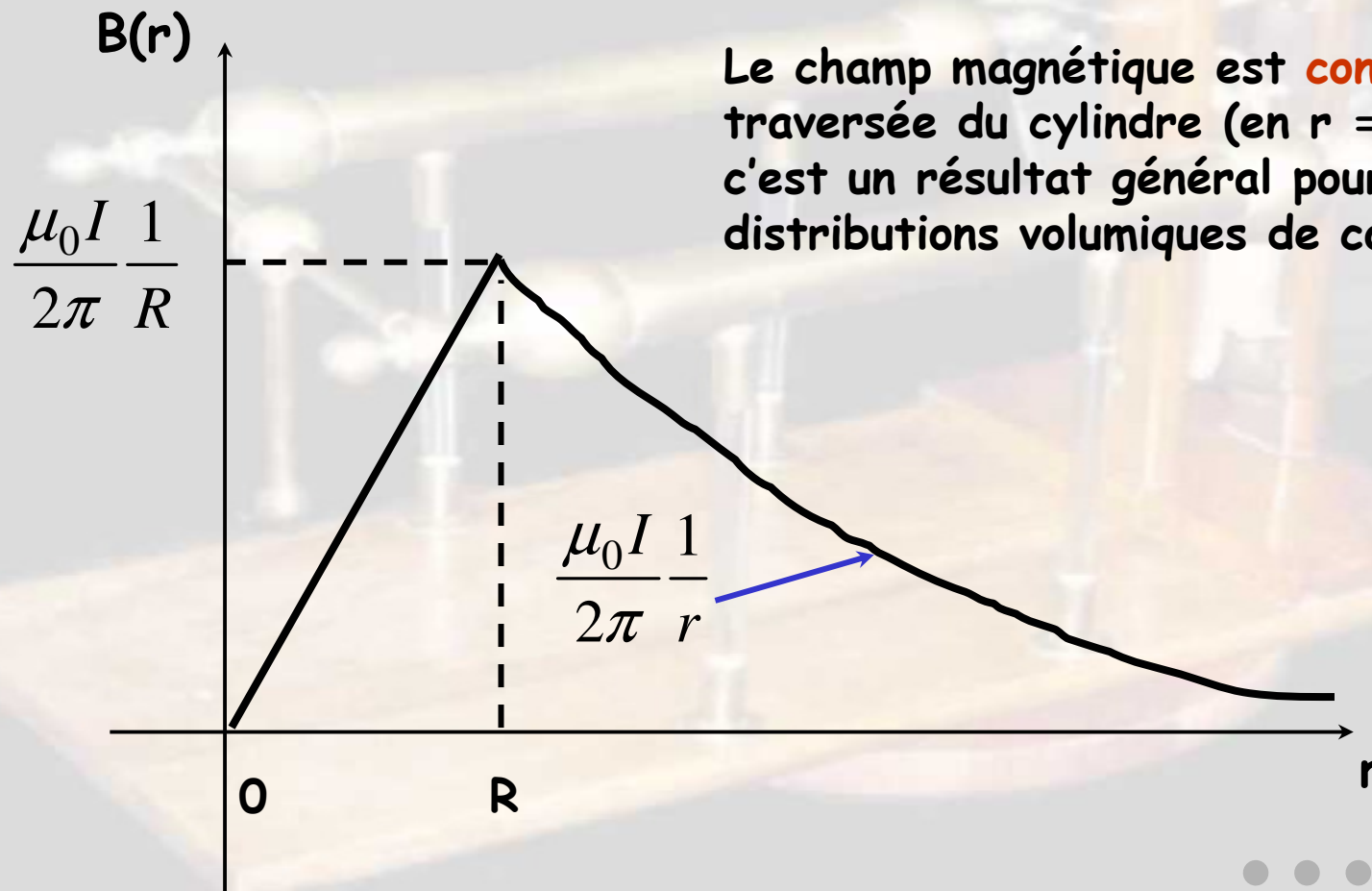
Pour $r < R$: $I_{enl} = \pi r^2 j_0 = \frac{r^2}{R^2} I_0$

$$C = 2\pi rB(r) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I_0 \quad ;$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

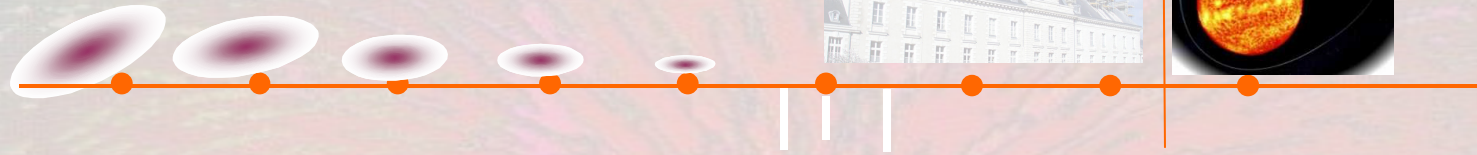


Représentation graphique du champ $B(r)$:



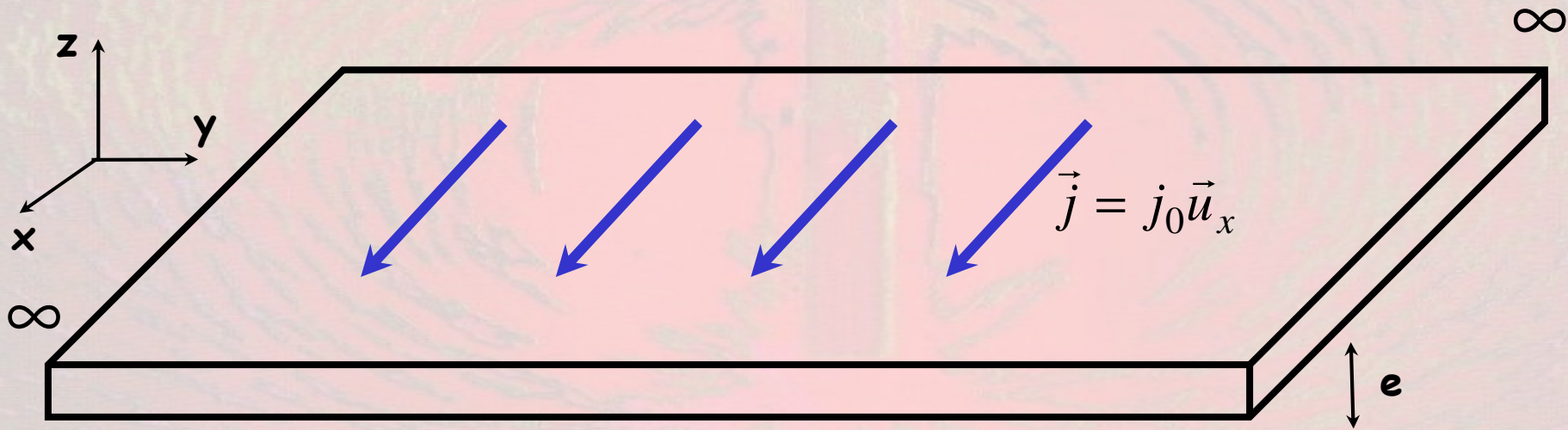
Le champ magnétique est **continu** à la traversée du cylindre (en $r = R$) : c'est un résultat général pour des distributions volumiques de courants.



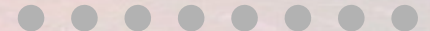


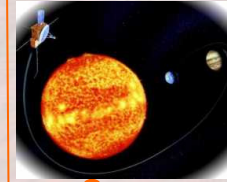
3 - Plaque plane infinie d'épaisseur e : (densité uniforme)

• M



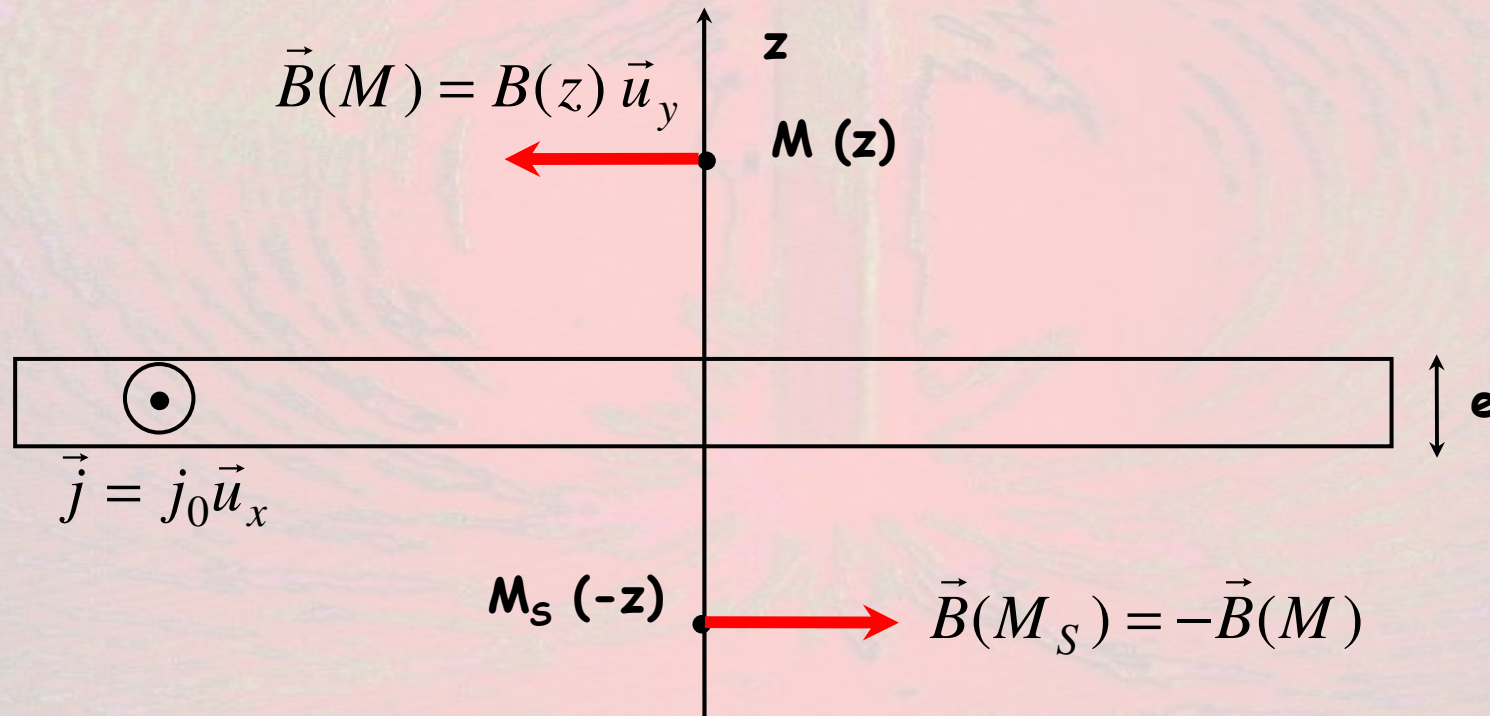
Déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.

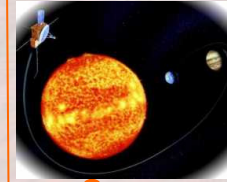




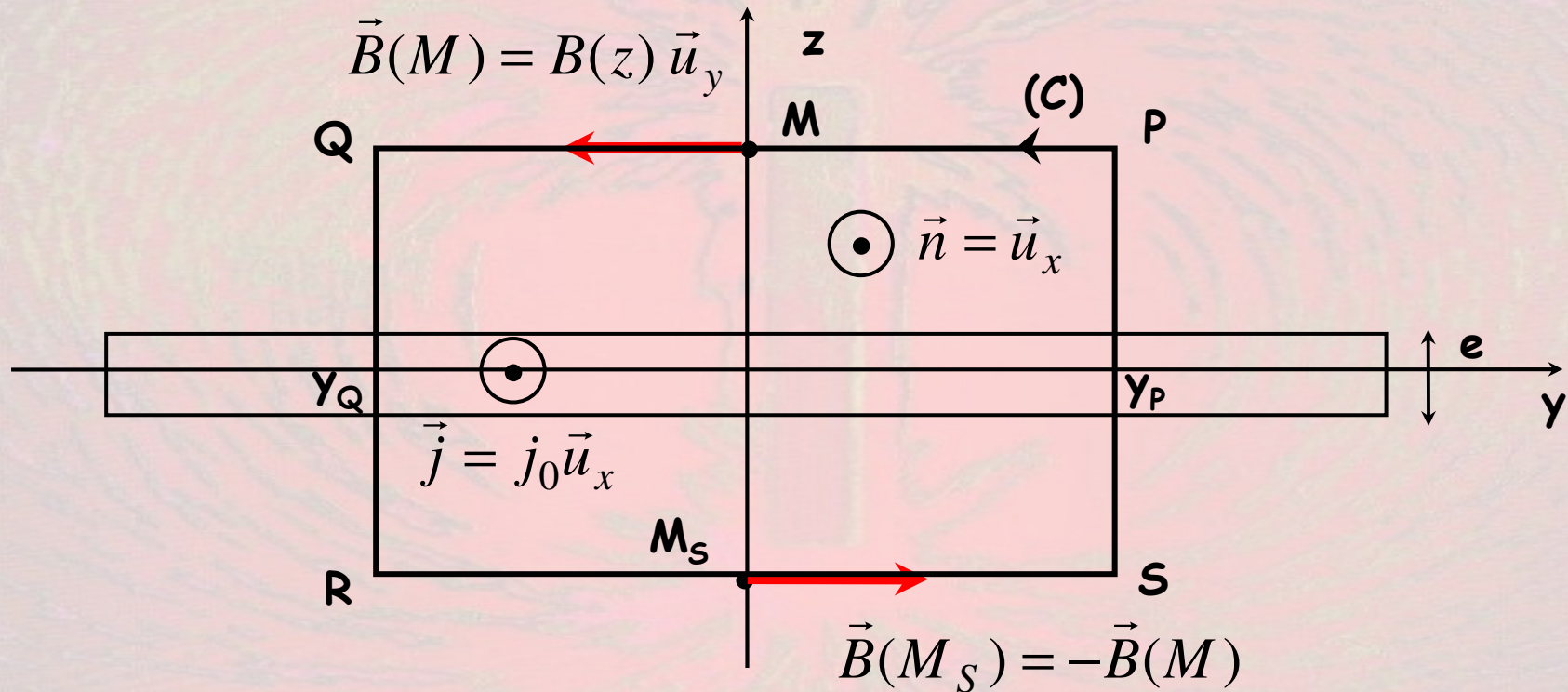
Étude des invariances : le champ ne dépend que de la cote z .

Étude des symétries : $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$; $B(-z) = -B(z)$





Application du théorème d'Ampère :

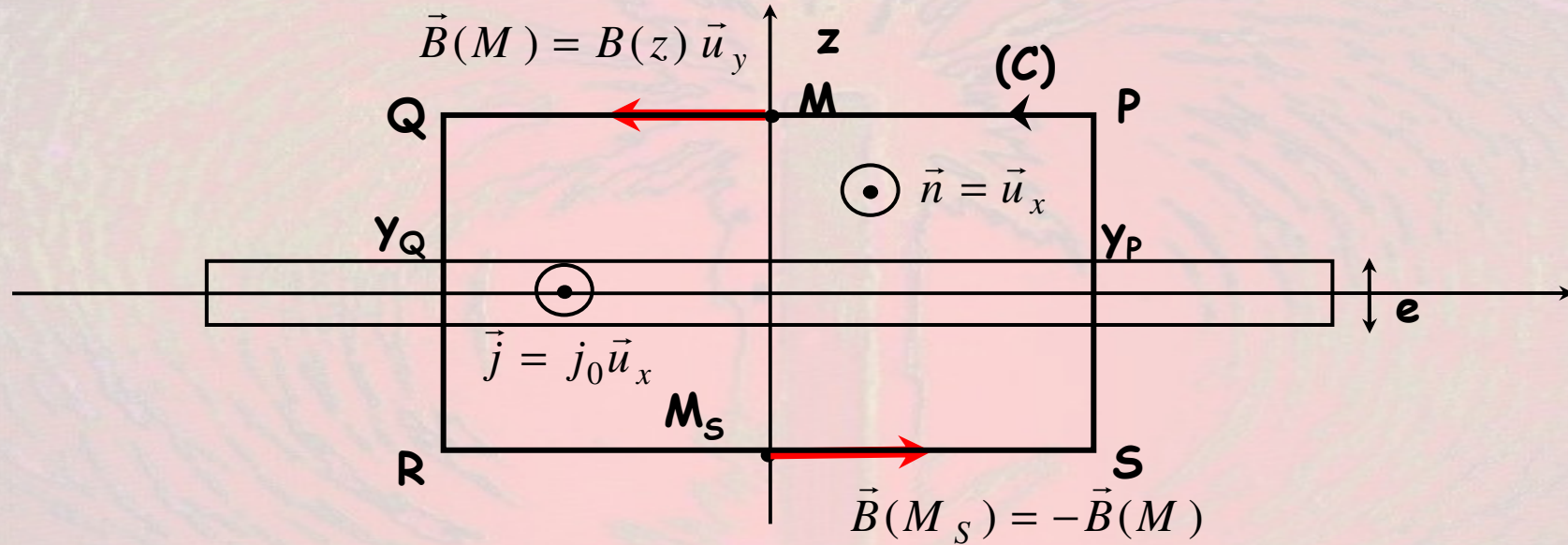


Contour (C) : rectangle orienté (PQRS), passant par M et M_S.





Calcul de la circulation du champ sur le contour (C) :



$$C = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{r} = \int_{y_P}^{y_Q} B(z) \vec{u}_y \cdot (dy \vec{u}_y) + \int_{y_R=y_Q}^{y_S=y_P} (-B(z) \vec{u}_y) \cdot (dy \vec{u}_y)$$

$$C = -2(y_P - y_Q) B(z)$$





Application du théorème d'Ampère :

$$\text{Si } z > e / 2 : I_{enl} = (y_P - y_Q) e j_0$$

$$-2(y_P - y_Q) B(z) = \mu_0 (y_P - y_Q) e j_0 \quad ;$$

$$B(z) = -\frac{\mu_0 j_0 e}{2}$$

$$\text{Si } 0 < z < e / 2 : I_{enl} = (y_P - y_Q) (2z) j_0$$

$$-2(y_P - y_Q) B(z) = \mu_0 (y_P - y_Q) (2z) j_0 \quad ;$$

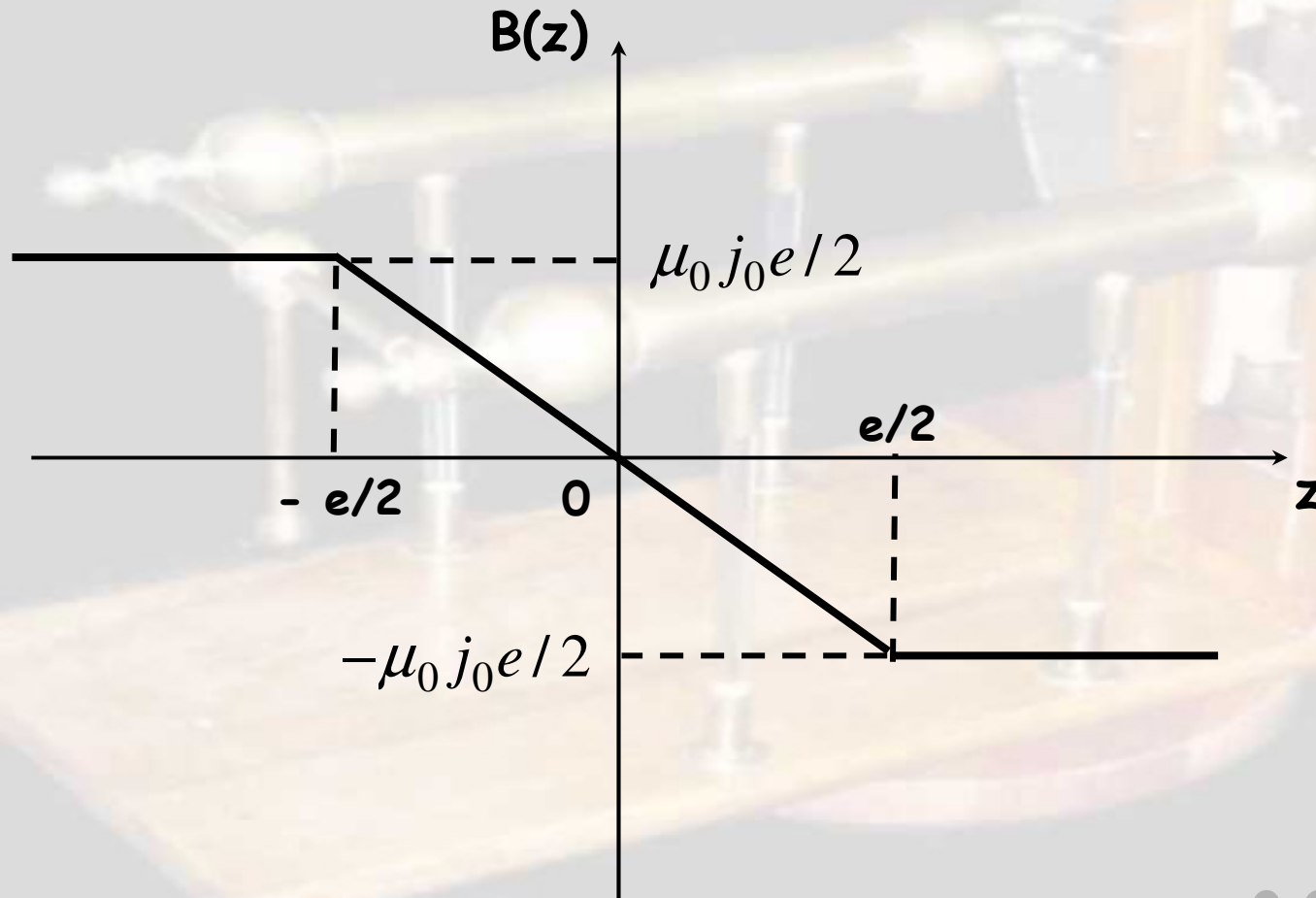
$$B(z) = -\mu_0 j_0 z$$

On constate bien que le champ est continu en $z = e / 2$.



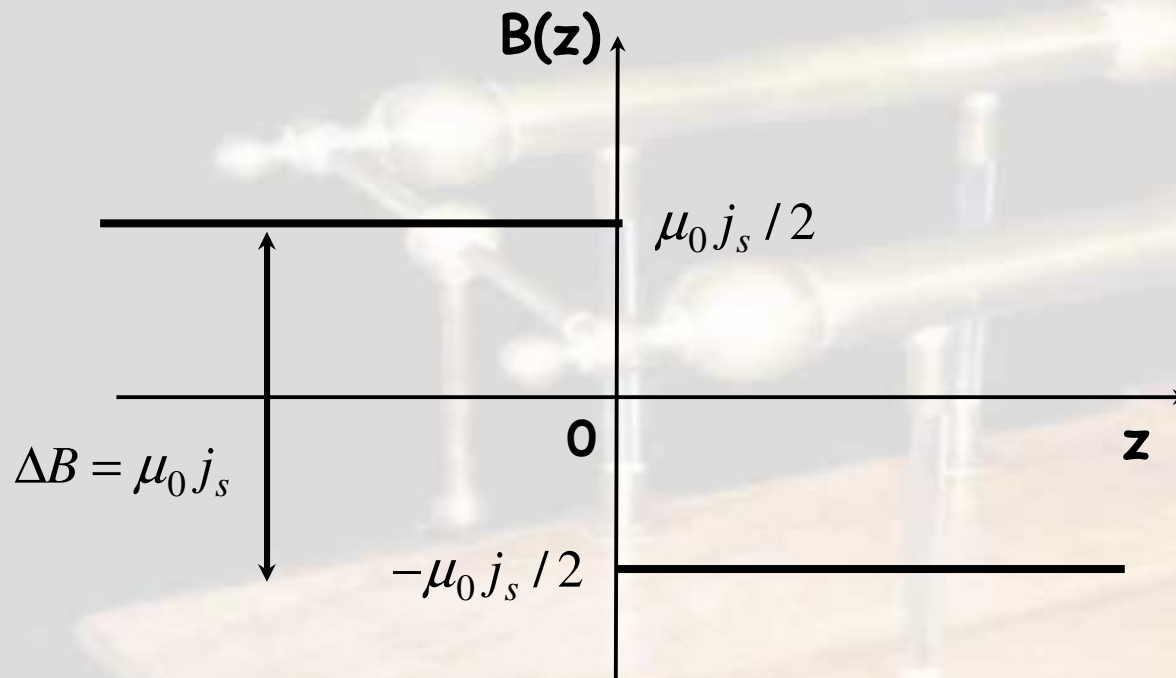


Représentation graphique du champ $B(z)$:





Complément : nappe de courant plane (courant surfacique uniforme j_s)

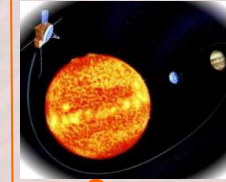


Le champ subit une **discontinuité** lors de la traversée de la nappe de courant égale à :

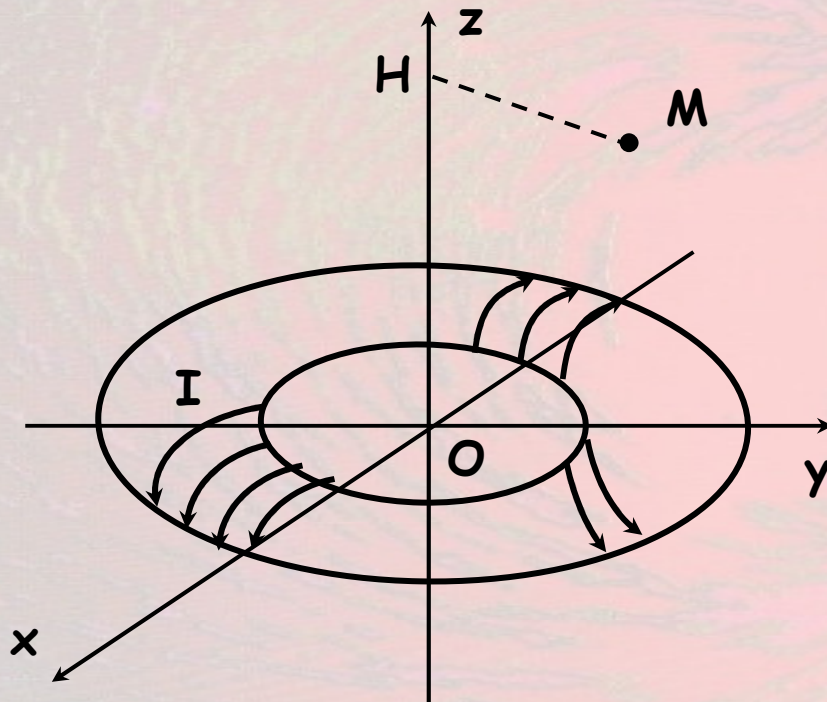
$$\Delta B = \mu_0 j_s$$

(Résultat tout à fait général)





4 - Bobine torique (de section transverse quelconque) :



Une bobine torique est constituée de N spires jointives (parcourues par un courant d'intensité I) régulièrement enroulées sur un tore de révolution d'axe (Oz) .

La section transverse du tore est quelconque (pas nécessairement circulaire).

Soit (r, θ, z) les coordonnées cylindriques du point M .

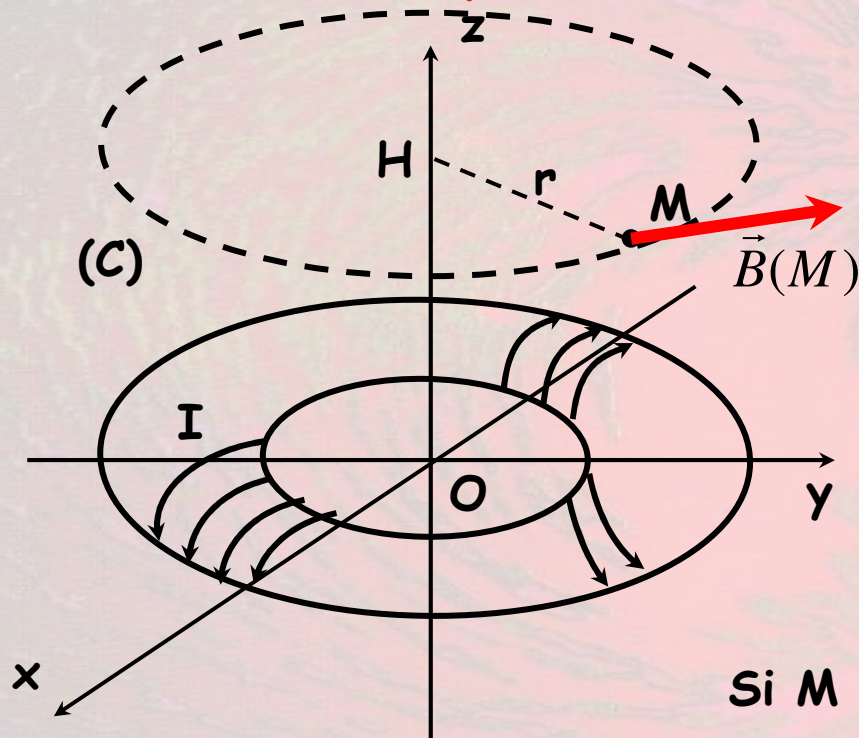
L'étude des invariances et des symétries donnent : (le plan OHM est un plan de symétrie (π^+))

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$$





4 - Bobine torique (de section transverse quelconque) :



Application du théorème d'Ampère :

On choisit comme contour le cercle orienté de centre H et de rayon r (passant donc par M). La circulation du champ sur ce contour vaut :

$$C = 2\pi rB(r, z)$$

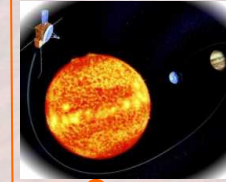
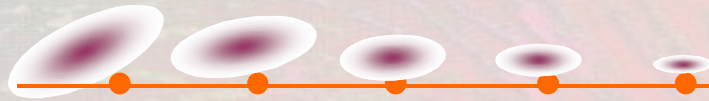
Si M est **en dehors** du tore :

$$I_{enl} = 0 \quad \text{et} \quad B(r, z) = 0$$

Si M est **intérieur** au tore :

$$I_{enl} = NI \quad \text{et} \quad B(r, z) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Le champ ne dépend ni de z ni de la forme de la section transverse du tore.

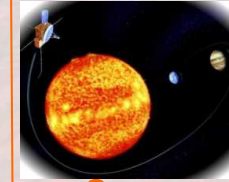


5 - Solénoïde infini (de section transverse quelconque) :

On considère un solénoïde infini de section transverse quelconque composé de spires jointives parcourues par un courant d'intensité I ; on note n le nombre de spires par unité de longueur.

On veut calculer le champ magnétique en tout point de l'espace (intérieur ou extérieur au solénoïde).

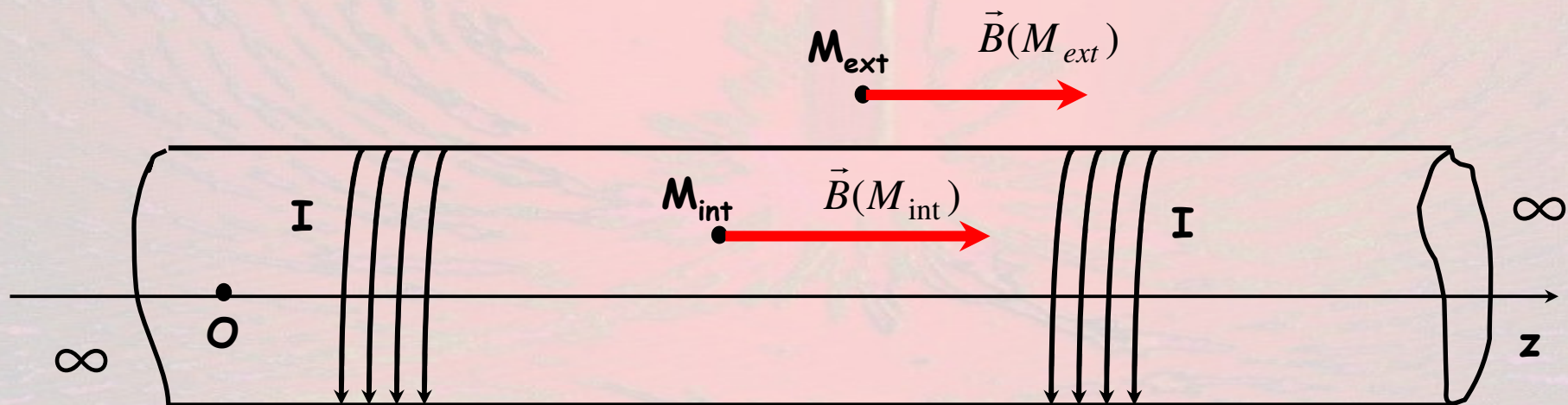




Étude des invariances et des symétries :

Le plan passant par un point M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan (π^+). Le champ magnétique est donc porté par l'axe (Oz). Par ailleurs, il y a invariance par translation selon (Oz) puisque le solénoïde est infini (mais par rotation autour de ce même axe). Par conséquent :

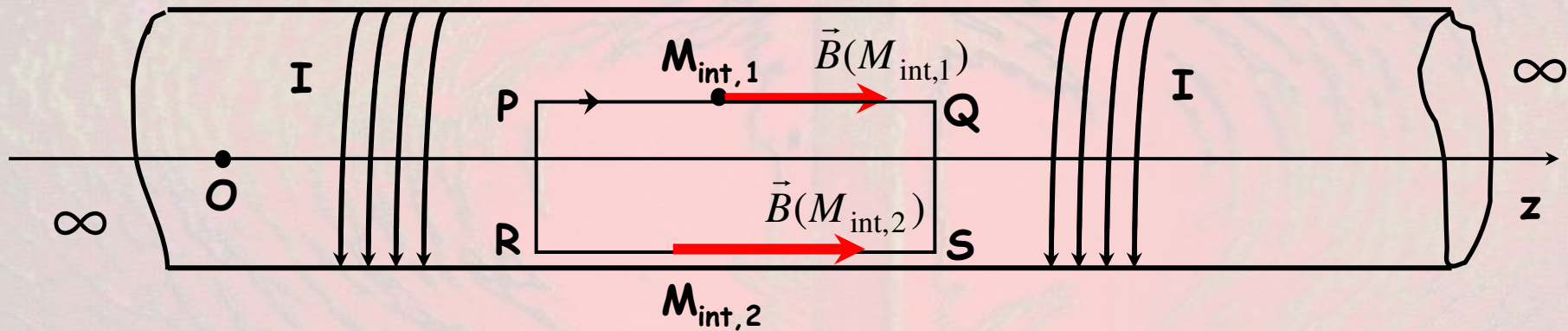
$$\vec{B}(M) = B(r, \theta) \vec{u}_z$$





Application du théorème d'Ampère :

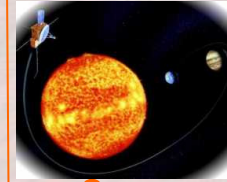
On choisit comme contour orienté un cadre rectangulaire qui passe en deux points intérieurs au solénoïde (situés à des distances à l'axe différentes) :



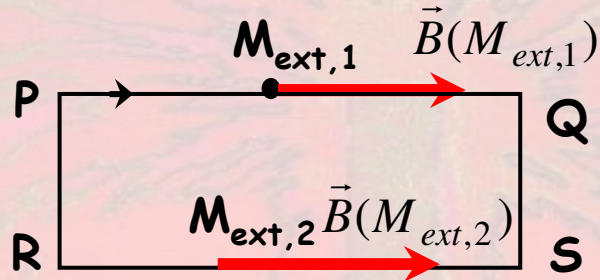
$$\left\{ \begin{array}{l} C = B(M_{\text{int},1}) \cdot PQ - B(M_{\text{int},2}) \cdot RS = (B(M_{\text{int},1}) - B(M_{\text{int},2})) \cdot PQ \\ I_{\text{enl}} = 0 \end{array} \right.$$

Donc : $B(M_{\text{int},1}) = B(M_{\text{int},2}) = B_{\text{int}}$

Le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini.



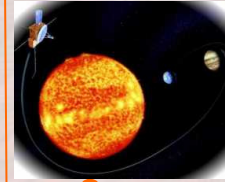
De la même manière, pour deux points extérieurs au solénoïde :



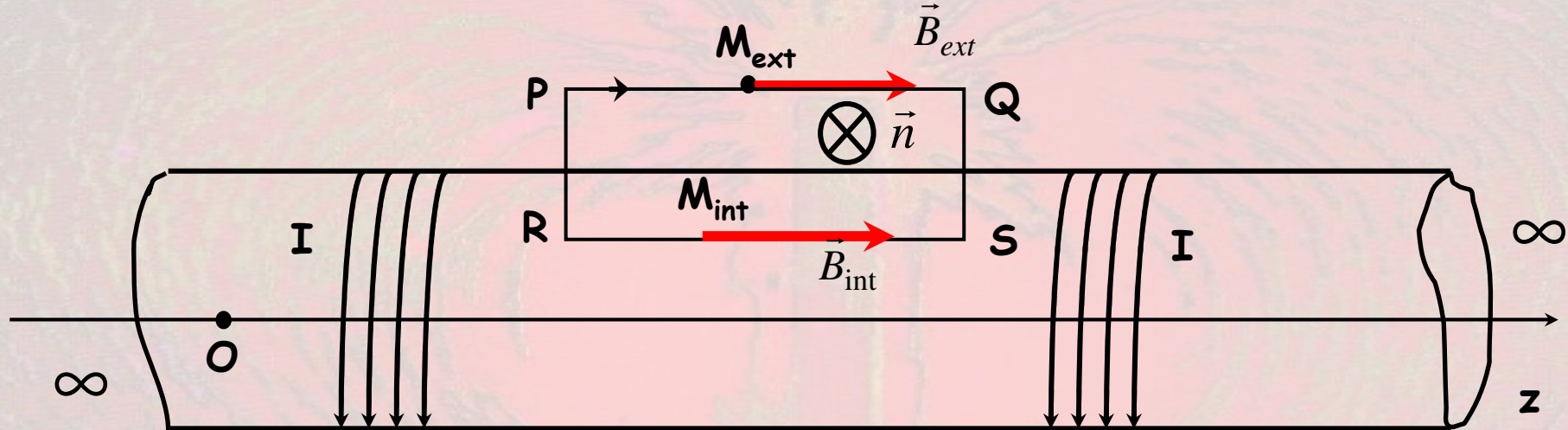
$$B(M_{ext,1}) = B(M_{ext,2}) = B_{ext}$$

Le champ est uniforme à l'extérieur du solénoïde infini.

Avec, a priori : $B_{int} \neq B_{ext}$



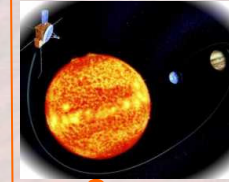
On choisit un contour « à cheval » sur le solénoïde :



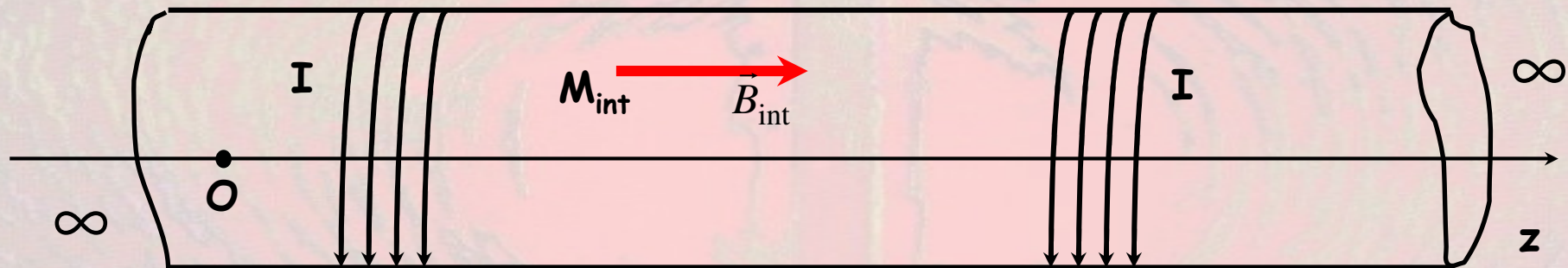
$$C = (B_{ext} - B_{int}) \cdot PQ = \mu_0 I_{enl} = \mu_0 (-n PQ I)$$

D'où :

$$B_{int} = B_{ext} + \mu_0 n I$$



En assimilant un solénoïde infini à un tore de révolution de rayon infini, on montre que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Par conséquent, à l'intérieur du solénoïde :



$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I$$

On retrouve le résultat obtenu avec la loi de Biot et Savart pour un solénoïde infini à section circulaire et pour un point de l'axe (Oz).